Pitkä matematiikka 19.9.2007, ratkaisut:

1. a) $2 - 3x > 4x \iff 7x < 2 \iff x < \frac{2}{7}$.

b) Kulmakerroin on $\frac{6+3}{-2-4} = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$. Suoran yhtälö on $y + 3 = -\frac{3}{2}(x-4) \iff 2y + 6 = -3x + 12 \iff 3x + 2y = 6$.

c) Korottamalla neliöön saadaan $t^2 = \dfrac{1}{4\pi^2 LC}$, josta $L = \dfrac{1}{4\pi^2 C t^2}$.

2. a) $f'(x) = \cos x D \sin x + \sin x D \cos x = \cos^2 x - \sin^2 x$, joten $f'(0) = \cos^2 0 - \sin^2 0 = 1$.

b) $\int_1^3 \dfrac{1}{x^3} dx = -\Big/_1^3 \dfrac{1}{2x^2} = -\frac{1}{2}(\frac{1}{9} - 1) = \frac{4}{9}$.

c) Integraalifunktio $F(x) = \int (e^x + 1) dx = e^x + x + C$. On oltava $F(0) = -2$ eli $e^0 + C = -2$, josta $C = -3$. Integraalifunktio on $e^x + x - 3$.

3. a) Vektori $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = (5{,}9 - 2{,}2)\bar{\imath} + (-2{,}1 - 7{,}3)\bar{\jmath} = 3{,}7\bar{\imath} - 9{,}4\bar{\jmath}$.

b) Sivujen pituudet ovat $|\overline{AB}| = \sqrt{2{,}2^2 + 7{,}3^2} \approx 7{,}62430$, $|\overline{AC}| = \sqrt{5{,}9^2 + 2{,}1^2} \approx 6{,}26259$, $|\overline{BC}| = \sqrt{3{,}7^2 + 9{,}4^2} \approx 10{,}10198$. Tästä näkyy, että $|\overline{BC}| > |\overline{AB}| > |\overline{AC}|$.

c) Kulmalle $\alpha = \angle BAC$ pätee $\cos\alpha = \dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}||\overline{AC}|} \approx -0{,}049216$, joten $\alpha \approx 92{,}8^{\circ}$.

4. Olkoon a alkuperäinen hinta. Korotettu hinta oli $(1 + p/100)a$. Jos x %:n alennus palauttaa alkuperäiseen hintaan, on $(1 - x/100)(1 + p/100)a = a$. Yhtälö sieventyy muotoon $x(1 + p/100) = p$, josta saadaan $x = \dfrac{p}{1 + p/100} = \dfrac{100p}{100 + p}$.

Vastaus: Alennus oli $\dfrac{100p}{100 + p}$ %.

5. Täydentämällä neliöksi saadaan ympyrän yhtälö muotoon $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4$. Ympyrän keskipiste on siis $(-2, 1)$ ja säde 2. Piste $(1, 3)$ on ympyrän ulkopuolella. Siitä ympyrälle piirretyt tangentit ovat muotoa $y - 3 = k(x - 1)$. Keskipisteen etäisyyden tangentista on oltava kaksi. Tästä saadaan kulmakertoimelle k ehto $\dfrac{|-2k - 1 - k + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2$, joka sievenee muotoon $5k^2 - 12k = 0$. Ratkaisut ovat $k = 0$ ja $k = \frac{12}{5}$. Vastaavat tangentit ovat $y = 3$ ja $12x - 5y + 3 = 0$.

Vastaus: $y = 3$ ja $12x - 5y + 3 = 0$.

6. Olkoon x majakan etäisyys tiestä ja y lähimmän pisteen etäisyys tien alkupisteestä. Tällöin $\dfrac{x}{y} = \tan 65^{\circ}$ ja $\dfrac{x}{5 - y} = \tan 54^{\circ}$. Sijoittamalla ensimmäisestä yhtälöstä saatu $x = y \tan 65^{\circ}$ toiseen yhtälöön saadaan $y \tan 65^{\circ} = (5 - y)\tan 54^{\circ}$. Tästä ratkeaa y, $y = \dfrac{5 \tan 54^{\circ}}{\tan 54^{\circ} + \tan 65^{\circ}} \approx 1{,}9546$ (km) ja edelleen $x \approx 4{,}1916$ km.

Vastaus: Majakka on 4,192 km tiestä. Alkupäästä 1,955 km päässä oleva piste on lähinnä majakkaa.

7. Pohjan ala on $A = \frac{1}{4}\sqrt{3}\,x^2$, missä x on pohjasärmän pituus. Jos sivusärmän pituus on a, on pyramidin korkeus $h = \sqrt{a^2 - \frac{1}{3}x^2}$. Pyramidin tilavuus $V(x) = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{4\sqrt{3}}\sqrt{a^2x^4 - \frac{1}{3}x^6}$. Riittää tarkastella juurrettavaa $f(x) = a^2x^4 - \frac{1}{3}x^6$. Derivaatta $f'(x) = 4a^2x^3 - 2x^5 = 2x^3(2a^2 - x^2)$ häviää, kun $x = 0$ tai $x = \pm a\sqrt{2}$. Koska $x > 0$ ja $f'(x) > 0$, kun $0 < x < a\sqrt{2}$ sekä $f'(x) < 0$, kun $x > a\sqrt{2}$, antaa $x = a\sqrt{2}$ f:n ja samalla V:n suurimman arvon. Arvolla $a = 60$ cm, on $x = 60\sqrt{2} \approx 84{,}853$ cm.

Vastaus: Sivusärmän pituudeksi on valittava $60\sqrt{2}$ cm $\approx 84{,}9$ cm.

8. Vihreän valon todennäköisyys on ensimmäisissä valoissa $p_1 = 0{,}3$, toisissa $p_2 = 0{,}4$ ja kolmansissa $p_3 = 0{,}2$. Todennäköisyys, että joutuu pysähtymään enintään kerran, on $p = p_1p_2p_3 + p_1p_2(1-p_3) + p_1(1-p_2)p_3 + (1-p_1)p_2p_3 = 0{,}212$.

Vastaus: 21,2 %

9. Funktio on määritelty, kun $x > 0$ ja $\ln x \neq 0$ eli $x \neq 1$. Funktion derivaatta $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$. Kun $0 < x < 1$, on $\ln x < 0$ ja samalla $f'(x) < 0$. Kun $x > 1$, on $f'(x) < 0$, kun $\ln x < 1$ eli $1 < x < e$ ja $f'(x) > 0$, kun $\ln x > 1$ eli $x > e$. Siten funktio on vähenevä kun $0 < x < 1$ tai $1 < x < e$ ja kasvava, kun $x > e$.
Alueessa $x > 1$ funktio on jatkuva ja $f'(x) = 0$, kun $\ln x = 1$ eli $x = e$. Edellisen perusteella funktio saa tässä pienimmän arvonsa $f(e) = e$. Koska $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, saa funktio kaikki arvot väliltä $[e, \infty[$, kun $x > 1$. Alueessa $0 < x < 1$ funktio on myös jatkuva ja $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$. Lisäksi $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Siten funktio saa kaikki arvot väliltä $]-\infty, 0]$, kun $0 < x < 1$. Näin ollen funktio ei saa arvoja väliltä $[0, e[$.

10. Aina $|\sin 2x| \leq 1$. Edelleen välillä $[\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi]$ on $\sin 2x \geq 0$, kun $\frac{1}{4}\pi \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ ja $\sin 2x \leq 0$, kun $\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{3}{4}\pi$. Näin ollen tasoalueen pinta-ala on

$A = \int_{\pi/4}^{\pi/2}(1 - \sin 2x)dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/4}(1 + \sin 2x)dx =$

$\Big/_{\pi/4}^{3\pi/4} x + \Big/_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{2}\cos 2x - \Big/_{\pi/2}^{3\pi/4} \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}(2\cos\pi - \cos\frac{1}{2}\pi - \cos\frac{3}{2}\pi) = \frac{1}{2}\pi - 1.$

Vastaus: $\frac{1}{2}\pi - 1$.

11. **a)** Pisteiden $O = (0,0)$ ja $A = (r,r)$ välisen janan pituus on $r\sqrt{2}$. Jos uuden ympyrän keskipiste on pisteessä $B = (x,x)$, on janan OB pituus $x\sqrt{2}$. Tästä tulee OA:n pituudelle lauseke $OA = r + x + x\sqrt{2}$. On saatu yhtälö $x(\sqrt{2}+1) + r = r\sqrt{2}$, josta ratkeaa uuden ympyrän säteeksi $x = r\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = r(\sqrt{2}-1)^2$.

b) Merkitään $q = (\sqrt{2}-1)^2$, jolloin a)-kohdan $x = rq$. Kolmannen ympyrän säde on a)-kohdan mukaan $qx = rq^2$. Vastaavasti neljännen ympyrän säde on rq^3 ja yleisesti n:nen ympyrän säde rq^{n-1}. Ympyröiden pinta-alojen muodostama jono πr^2, πr^2q^2, πr^2q^4, , ... on geometrinen jono, jossa suhdeluku on q^2. Koska $0 < q^2 < 1$, on alojen summa suppeneva geometrinen summa $S = \pi r^2\dfrac{1}{1-q^2}$. Arvolla $r = 1$ saadaan sievennysten jälkeen $S = \pi\dfrac{1}{1-(\sqrt{2}-1)^4} = \frac{1}{8}\pi(3\sqrt{2}+4) \approx 3{,}236878$.

Vastaus: **a)** $r(\sqrt{2}-1)^2$, **b)** $\frac{1}{8}\pi(3\sqrt{2}+4) \approx 3{,}237$.

12. Funktion derivaatta $f'(x) = 6x^2 - 42x + 60$ häviää, kun $x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \dfrac{7 \pm 3}{2}$ eli kun $x = 2$ tai $x = 5$. Koska f':n kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, on $f'(x) < 0$, kun $2 < x < 5$. Näin ollen f on aidosti vähenevä välillä $[2,5]$, joten sillä on käänteisfunktio $g = f^{-1}$. Koska $f(2) = 52$ ja $f(5) = 25$ on $g : [25,52] \to [2,5]$. Koska $f(3) = 45$, on $g(45) = 3$. Lopulta $g'(45) = \dfrac{1}{f'(3)} = -\frac{1}{12}$.

13. $n^3 - n = n(n^2-1) = (n+1)n(n-1)$. Näin ollen $n^3 - n$ on aina kolmen peräkkäisen kokonaisluvun tulo. Kolmesta peräkkäisestä kokonaisluvusta on aina yksi jaollinen kolmella ja ainakin yksi jaollinen kahdella. Niiden tulo on siis aina jaollinen luvulla $2 \cdot 3 = 6$, mikä piti todistaa.

***14.** Funktion derivaatta $f'(x) = 1 + \sin x \geq 0$ kaikilla arvoilla x ja saa arvon 0 vain erillisissä pisteissä $x = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$. Näin ollen f on aidosti kasvava.

Funktio f on jatkuva. Koska aina $x - 1 \leq f(x)$, on $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ja koska aina $f(x) \leq x + 1$, on $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Näin ollen $f(x)$ saa kaikki reaalilukuarvot. Koska f on aidosti kasvava, saa se jokaisen reaalilukuarvon vain yhden kerran.

Koska $f(0) = -\cos 0 = -1 < 0$ ja $f(\frac{1}{2}\pi) = \frac{1}{2}\pi > 0$, on f:n ainoa nollakohta välillä $]0, \frac{1}{2}\pi[$. Newtonin algoritmi funktiolle f on $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - \cos x_n}{1 + \sin x_n}$. Alkuarvolla $x_0 = 0{,}785398$ $(\approx \frac{1}{4}\pi)$ saadaan $x_2 = 0{,}739085 = x_3$. Näin ollen nollakohta on kolmen desimaalin tarkkudella 0,739.

***15.** Pisteen A koordinaatit ovat $(0, r)$. Origokeskisen ympyrän yhtälö on $x^2 + y^2 = r^2$ ja $(1,0)$-keskisen ympyrän yhtälö $(x-1)^2 + y^2 = 1$ eli $x^2 + y^2 - 2x = 0$. Vähentämällä yhtälöt toisistaan saadaan B:n x-koordinaatiksi $x = \frac{1}{2}r^2$. B:n y-koordinaatti $y = \sqrt{r^2 - x^2} = r\sqrt{1 - \frac{1}{4}r^2}$. Siis $B = (\frac{1}{2}r^2, r\sqrt{1 - \frac{1}{4}r^2})$. Pisteiden A ja B kautta kulkevan suoran yhtälö on $y - r = kx$, missä kulmakerroin $k = \dfrac{r - r\sqrt{1 - \frac{1}{4}r^2}}{-\frac{1}{2}r^2} = \dfrac{2}{r}\left(\sqrt{1 - \dfrac{1}{4}r^2} - 1\right)$. P:n y-koordinaatti on 0, joten x-koordinaatti $x_P = -\dfrac{r}{k} = -\dfrac{r^2}{2\sqrt{1 - \frac{1}{4}r^2} - 1} = 2(\sqrt{1 - \frac{1}{4}r^2} + 1)$. Tällä on raja-arvo $\lim_{r\to 0} x_P = 2(\sqrt{1} + 1) = 4$.