

## Lyhyt matematiikka 17.9.2008, ratkaisut:

1. a)  $4x^2 + 9 = -12x \iff 4x^2 + 12x + 9 = 0$ . Tämän ratkaisu on  
$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{8} = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{8} = -\frac{3}{2}.$$
- b) Kertomalla  $(x - 1)$ :llä saadaan yhtälö muotoon  $x^2 - x = x^2 + 3$  eli  $-x = 3$ . Sen ratkaisu on  $x = -3$ .
- c)  $\frac{5x + 3y}{3} + \frac{x - 6y}{2} = \frac{10x + 6y + 3x - 18y}{6} = \frac{13x - 12y}{6} = \frac{13}{6}x - 2y$ .
2. a) Suoran yhtälö on  $y - 0 = \frac{7 - 0}{1 + 2}(x + 2)$  eli  $y = \frac{7}{3}(x + 2)$  eli  $y = \frac{7}{3}x + \frac{14}{3}$ .
- b) Pallon säteelle  $r$  m pätee:  $\frac{4}{3}\pi r^3 = 1000 \iff r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1000}{4\pi}} \approx 6,20350$ . Säde on siis 6,20 m.
- c)  $2^x = 1024 \iff 2^x = 2^{10} \iff x = 10$ .
3. a) Neljän kirjaimen järjestysten määrä on  $4!$  eli 24.
- b) Kääntäen verrannollisuudessa  $y = \frac{a}{x}$ , missä  $a$  on verrannollisuuskerroin. Kun  $x = 2$ , on  $y = 3$ , joten  $3 = a/2$ . Tästä saadaan  $a = 6$ . Arvolla  $x = 5$  on  $y = \frac{6}{5}$ .  
*Vastaus:* a) 24:ään järjestykseen, b)  $y = \frac{6}{5}$ .
4. Olkoon käyttökustannukset  $a$ , jolloin polttoainekustannukset ovat  $0,35a$  ja muut käyttökustannukset  $0,65a$ . Jos kysytty kallistuminen on  $x$  %, on oltava  $(1 + 0,01x)0,35a + 0,65a = 1,1a$  eli  $0,01 \cdot 0,35x = 0,1$ . Tästä saadaan  $x = \frac{10}{0,35} \approx 28,5714$ .  
*Vastaus:* 28,6 %.
5. Liisan reitin pituus on  $0,8 + 0,4 + 1,5 = 2,7$  (km). Hän käytti aikaa 20 min 30 s, joten keskinopeus oli  $\frac{2,7 \cdot 60}{20,5} \approx 7,902$  (km/h). Tarkastellaan sitten Piaa. Olkoon  $D$  piste, jossa hän eroaa Liisasta ja  $E$  piste, jossa hän kääntyy etelään. Pian reitin pituus on siis  $AE + EC$ . Kolmiosta  $ABD$  saadaan  $AB = \sqrt{0,8^2 + 0,4^2} \approx 0,894427$ . Näin ollen  $AC = AB + BC \approx 2,394427$ . Yhdenmuotoisista kolmioista  $ABD$  ja  $ACE$  saadaan  $EC = \frac{AC \cdot BD}{AB} \approx 1,07082$ . Edelleen  $AE = \frac{AD \cdot EC}{BD} = 2EC \approx 2,14164$ . Pian reitin pituus on  $AE + EC \approx 3,21246$  (km). Hän käytti aikaa 20 min 30 s + 3 min 20 s  $\approx 23,8333$  min. Pian keskinopeus oli  $\frac{3,21246 \cdot 60}{23,8333} \approx 8,087$  (km/h).  
*Vastaus:* Liisan reitin pituus oli 2,7 km ja keskinopeus 7,9 km/h. Pian reitin pituus oli 3,2 km ja keskinopeus 8,1 km/h.
6. Jos ensimmäistä seosta tarvitaan  $x$  g, on siinä  $0,25x$  g nikkeliä. Jos toista seosta tarvitaan  $y$  g, on siinä  $0,20y$  g nikkeliä. Lopullisessa seoksessa on oltava nikkeliä  $0,22 \cdot 300 = 66$  (g) Koska  $y = 300 - x$ , saadaan yhtälö  $0,25x + 0,20(300 - x) = 66$  eli  $0,05x = 6$ . Tämän ratkaisu on  $x = 120$ , jolloin  $y = 300 - 120 = 180$ .  
*Vastaus:* Ensimmäistä seosta 120 g ja toista 180 g.

7. Olkoon  $A$  pyramidin huippu,  $B$  pohjan keskipiste ja  $C$  sekä  $D$  vierekkäiset pohjaneliön kärkipisteet. Jos  $E$  on särmän  $CD$  keskipiste, on  $BE = 6$ . Suorakulmaisesta kolmiosta  $ABE$  saadaan  $AE = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ . Sivutahkon  $ACD$  ala on  $\frac{1}{2}AE \cdot CD = 60$ . Suorakulmaisessa kolmiossa  $BCE$  on  $BC = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ . Sivusärmän ja pohjatahkoon väliselle kulmalle  $\alpha = \angle ACB$  saadaan tästä yhtälö  $\tan \alpha = \frac{8}{6\sqrt{2}}$ , josta ratkeaa  $\alpha \approx 43,3139^\circ$ .

*Vastaus:* Sivutahkon ala on 60. Sivusärmä muodostaa pohjatahkoon kanssa  $43,31^\circ$  kulman.

8. Suora  $y = -3x + 2$  leikkaa  $x$ -akselin pisteessä  $x = \frac{2}{3}$ . Jos tämä on kolmen mittaisen janan päätepiste, toinen päätepiste on joko  $x = \frac{2}{3} + 3 = \frac{11}{3}$  tai  $x = \frac{2}{3} - 3 = -\frac{7}{3}$ . Toinen suora  $y = ax + 6$  kulkee pisteen  $(\frac{11}{3}, 0)$  kautta, kun  $0 = \frac{11}{3}a + 6$  eli kun  $a = -\frac{18}{11}$ . Vastaavasti  $y = ax + 6$  kulkee pisteen  $(-\frac{7}{3}, 0)$  kautta, kun  $0 = -\frac{7}{3}a + 6$  eli kun  $a = \frac{18}{7}$ .

*Vastaus:* Arvolla  $a = -\frac{18}{11}$  ja arvolla  $a = \frac{18}{7}$ .

9. Olkoon  $A$  linkkitornin huippu,  $B$  Tallinnan paikka, josta  $A$  juuri näkyy. Jana  $AB$  sivuaa maapallon pintaa pisteessä  $C$ . Jos  $O$  on maapallon keskipiste, on  $CO$  kolmion  $AOB$  korkeusjana. Kolmion kulmalle  $\alpha = \angle AOB$  saadaan arvo  $\alpha = \frac{85}{40000} \cdot 360^\circ = 0,765^\circ$ . Maapallon säde on  $r = \frac{40000}{2\pi} \approx 6366,1977$  (km). Suorakulmaisesta kolmiosta  $AOC$  saadaan yhtälö kulmalle  $\beta = \angle AOC$ ,  $\cos \beta = \frac{r}{r + 0,146}$ , josta saadaan  $\beta \approx 0,388034^\circ$ . Tarkastellaan suorakulmaista kolmiota  $BOC$ . Siinä kulma  $\gamma = \angle BOC = \alpha - \beta \approx 0,376966^\circ$ . Jos pisteen  $B$  korkeus merenpinnasta on  $x$  km, saadaan sille yhtälö  $\cos \gamma = \frac{r}{r + x}$ . Tästä saadaan  $x = r(\frac{1}{\cos \gamma} - 1) \approx 0,13779$ .

*Vastaus:* 138 m korkeudelta.

10. Kukin jonon termi saadaan edellisestä kertomalla se luvulla  $q = 1,05$ . Näin ollen jonon toinen termi on  $2q$ , kolmas  $2q^2$  ja neljäs  $2q^3$ . Kyseessä on geometrinen jono, jonka  $n$ :s termi on  $2q^{n-1}$ . Jonon jokainen termi on edellistä suurempi. Tutkitaan milloin  $2q^{n-1} < 10^9$  eli  $q^{n-1} < 0,5 \cdot 10^9$ . Ottamalla puolittain logaritmi saadaan ehto  $n < 1 + \frac{\lg(0,5 \cdot 10^9)}{\lg q} = 1 + \frac{9 + \lg 0,5}{\lg 1,05} \approx 411,536$ . Siis 411 termiä jää alle annetun rajan. Näiden termien summa on  $S = 2 \cdot \frac{1 - q^{411}}{1 - q} \approx 2,04579 \cdot 10^{10}$ .

*Vastaus:*  $n$ :s termi on  $2 \cdot 1,05^{n-1}$ , 411 termiä alittaa 1000 miljoonaa ja näiden termien summa on  $2,046 \cdot 10^{10}$ .

11. a) Todennäköisyys sille, että siemen itää, on 0,6 ja sille, ettei idä 0,4. Todennäköisyys sille, että kolmesta siemenestä mikään ei idä on  $0,4^3 = 0,064$ . Todennäköisyys sille, että kolmesta ainakin yksi itää on  $1 - 0,4^3 = 0,936$ .
- b) Todennäköisyys sille, että yhdessä ruukussa ainakin yksi siemen itää, on 0,936. Todennäköisyys sille, että jokaisessa viidessä ruukussa ainakin yksi siemen itää, on  $0,936^5 \approx 0,718$ .

- 12.** Funktion  $-x^3 + 13,5x^2 - 41x + 50$  derivaatta  $f'(x) = -3x^2 + 27x - 41$ . Derivaatta häviää, kun  $x = \frac{-27 \pm \sqrt{27^2 - 12 \cdot 41}}{-6} = \frac{27 \pm \sqrt{237}}{6}$  eli arvoilla  $x_1 \approx 7,06580$  ja  $x_2 \approx 1,93420$ . Nyt  $f(0) = 50$ ,  $f(x_2) \approx 13,967$ ,  $f(x_1) \approx 81,533$  ja  $f(10) = -10$ . Tämän perusteella suurin arvo on  $f(x_1)$ . Funktio kasvaa nopeimmin kohdassa, missä derivaatalla on suurin arvo. Toinen derivaatta on  $f''(x) = -6x + 27$ . Se häviää, kun  $x = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$ . Koska  $f'(0) = -41$ ,  $f'(\frac{9}{2}) = 19,75$  ja  $f'(10) = -71$ , on  $f'(\frac{9}{2})$  derivaatan suurin arvo.

*Vastaus:* Funktiolla on suurin arvo 81,533 pisteessä  $x \approx 7,066$ . Funktio kasvaa nopeimmin pisteessä  $x = \frac{9}{2}$ .

- 13.** On määrättävä millä arvolla  $k$  funktio  $f(k) = (k - 1,2)^2 + (2k - 3,1)^2 + (4k - 5,5)^2$  saa pienimmän arvon. Funktion sievennetty lauseke on  $f(k) = 21k^2 - 58,8k + 41,30$ . Funktion derivaatta on  $f'(k) = 42k - 58,8$ . Derivaatta häviää, kun  $x = \frac{58,8}{42} = 1,4$ . Koska funktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli, saa se pienimmän arvonsa derivaatan nollakohdassa.

*Vastaus:* Arvolla  $k = 1,4$ .

- 14.** Kun korkokanta on 2,2 % ja lähdevero 28 %, tulee lähdeverotetuksi korkokannaksi  $q = 1 + 0,01 \cdot 0,72 \cdot 2,2 = 1,01584$ . On määrättävä viitenä vuotena suoritetun 2500 euron maksun nykyarvo. Se on  $2500(q^{-1} + q^{-2} + q^{-3} + q^{-4} + q^{-5}) \approx 11\,927,28$  (euroa).

*Vastaus:* Kertasumman tulee olla vähintään 11 927,28 euroa.

- 15. A)** Valmiusajan pituuden 95 % luottamusväli on  $[\bar{x} - 1,96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1,96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}]$ . Tehtävän tapauksessa  $\bar{x} = 253$  h,  $s = 12$  h ja  $n = 50$ . Näillä arvoilla tulee luottamusväliksi tunneissa  $[253 - 3,326; 253 + 3,326] = [249,674; 256,326]$ . Jotta luottamusvälin pituus olisi kaksi tuntia, on oltava  $2 \cdot 1,96 \cdot \frac{12}{\sqrt{n}} = 2$  eli  $\sqrt{n} = 1,96 \cdot 12$ . Siis  $n = 553,1904$ .

*Vastaus:* Luottamusväli on  $[249,7; 256,3]$  tuntia. Sen pituus on kaksi tuntia, kun mitataan 553 akkua.

**B)** Funktio  $f(t) = A \sin bt$  on jaksollinen. Jos joku alin asema saavutetaan arvolla  $t$ , saavutetaan seuraava arvolla  $t + 3,2$ . Koska sinin jakso on  $2\pi$ , saadaan kertoimelle  $b$  ehto  $b(t + 3,2) - bt = 2\pi$ . Tästä saadaan  $b = \frac{2\pi}{3,2} \approx 1,9634954$ .

*Vastaus:*  $b \approx 1,96350$ .