



Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä (★) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1. a) Ratkaise yhtälö $(x - 2)(x - 3) = 6$.
b) Ratkaise yhtälö $\frac{x}{x - 3} - \frac{1}{x} = 1$.
c) Osoita, että $\sqrt{27 - 10\sqrt{2}} = 5 - \sqrt{2}$.
2. a) Ratkaise epäyhtälö $6(x - 1) + 4 \geq 3(7x + 1)$.
b) Ratkaise yhtälö $\sqrt{x + 2} = 3$.
c) Ratkaise yhtälö $\sin(x/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. a) Funktion $f(x) = ax^2e^x + bxe^x$ derivaatta on $f'(x) = 2x^2e^x + xe^x - 3e^x$. Määritä a ja b .
b) Laske $\int_{-1}^{4/9} \frac{1}{\sqrt{x + 5}} dx$.
4. Suorakulmaisen laatikon sivujen pituuksien suhde on $2 : 3 : 4$. Laske sivujen pituudet millimetrin tarkkuudella, kun laatikon tilavuus on 10 litraa.
5. Olkoot $A = (2, 3, 1)$, $B = (-5, 7, 2)$ ja $C = (1, 5, 3)$ kolmiulotteisen avaruuden pisteitä. Laske $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$.
6. Kolmion kärjet ovat pisteissä $(-5, 3)$, $(2, -1)$ ja $(4, 8)$.
a) Laske kolmion kulmat asteen kymmenesosan tarkkuudella.
b) Laske kolmion pinta-ala yhden desimaalin tarkkuudella.
7. A, B, C ja D aikovat jakaa keskenään korillisen omenoita siten, että kukin vuorollaan ottaa aina yhden omenan. Korissa olevien omenoiden lukumäärää ei tiedetä. A ehdottaa vedonlyöntiä: jos jokaiselle tulee yhtä monta omenaa, A maksaa kolmelle muulle kullekin 50 euroa. Muussa tapauksessa kukin kolmesta maksaa A:lle 25 euroa. Laske A:n saaman rahamäärän odotusarvo.
8. Ratkaise epäyhtälö
$$\frac{-x^2 + x + 2}{x^3 + 2x^2 - 3x} > 0.$$
9. Mikä paraabelin $y = 5 - x^2$ piste on lähinnä origoa? Piirrä kuvio.
10. Laske käyrien $y = e^x$ ja $y = 4 - 3e^{-x}$ väliin jäävän rajoitetun alueen pinta-ala. Anna vastauksena tarkka arvo ja kolmidesimaalinen likiarvo.

KÄÄNNÄ!

- 11.** Janasta poistetaan keskimäinen kolmannes. Jäljelle jääneistä osajanoista poistetaan jälleen keskimäinen kolmannes. Poistamista jatketaan loputtomiin poistamalla jokaisella askeleella jäljellä olevista osajanoista keskimäinen kolmannes. Mikä on poistettujen osien yhteinen pituus verrattuna janan alkuperäiseen pituuteen?
- 12.** Parilliset luonnolliset luvut voidaan esittää muodossa $2p$, $p = 0, 1, 2, 3, \dots$, ja parittomat muodossa $2p + 1$, $p = 0, 1, 2, 3, \dots$. Osoita tämän perusteella, että
- kahden parittoman luvun summa on parillinen ja
 - kahden parittoman luvun tulo on pariton.
- 13.** Oletetaan, että funktio $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ on derivoituva, $f(\frac{1}{2}) = 1$ ja derivaatalle pätee $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{3}{4}$. Mitä voidaan päätellä funktion arvosta $f(3)$?
- ★14.** a) Osoita, että jokaiselle kolmannen asteen polynomille $p(x)$ pätee

$$\int_0^2 p(x) dx = \frac{1}{3}[p(0) + 4p(1) + p(2)]. \quad (3 \text{ p.})$$

b) Laske tämän avulla $\int_0^2 (x^3 + x^2 + x + 1) dx$. (3 p.)

c) Osoita, että kaava ei päde kaikille neljännen asteen polynomeille. (3 p.)

- ★15.** Suoran ympyräpohjaisen katkaistun kartion korkeus on h ja pohjien säteet r_1 ja r_2 , $r_1 > r_2$.
- Määritä pohjien suuntaisen leikkauksen pinta-ala $a(z)$ korkeudella $z \in [0, h]$. (2 p.)
 - Laske $\int_0^h a(z) dz$. (2 p.)
 - Miten eo. integraali liittyy katkaistun kartion tilavuuteen? (1 p.)
 - Laske yllä esitettyä periaatetta soveltaen r -säteisen pallon tilavuus käyttämällä vaakasuoria tasoleikkauksia. (4 p.)