

Lyhyt matematiikka 28.9.2012, ratkaisut:

1. a) $x^2 - 2x = 0 \iff x(x - 2) = 0 \iff x = 0$ tai $x = 2$.

b) $\frac{2}{3}x - 1 = \frac{2}{3} \iff 2x - 3 = 2 \iff x = \frac{5}{2}$.

c) Kertomalla jälkimmäinen yhtälö kahdella ja laskemalla yhteen saadaan $5x = -10$ eli $x = -2$. Siitä $y = 2(-2) + 3 = -1$.

Vastaus: a) $x = 0$ tai $x = 2$, b) $x = \frac{5}{2}$, c) $x = -2$, $y = -1$.

2. a) Suolapitoisuusprosentti on $100 \cdot \frac{9,0}{250} = 3,6$.

b) Toisen kateetin pituus on $\sqrt{4,9^2 - 2,3^2} = \sqrt{18,72} \approx 4,3267$ (m).

c) Suoran yhtälö on $y - 0 = \frac{8 - 0}{0 - 12}(x - 12) \iff y = -\frac{2}{3}(x - 12) \iff y = -\frac{2}{3}x + 8$.

Vastaus: a) 3,6%, b) 4,3 m, c) $y = -\frac{2}{3}x + 8$.

3. a) $f(x) = x(x + 2)^2 = x^3 + 4x^2 + 4x$, joten $f'(x) = 3x^2 + 8x + 4$. Siis $f'(0) = 4$.

b) $2^{3x+1} = 32 \iff 2^{3x+1} = 2^5 \iff 3x + 1 = 5 \iff x = \frac{4}{3}$.

c) $\log_4(3x) = 3 \iff 3x = 4^3 \iff x = \frac{64}{3}$.

Vastaus: a) $f'(0) = 4$, b) $x = \frac{4}{3}$, c) $x = \frac{64}{3}$.

4. a) Leikkauspisteiden x -koordinaateille pätee $x^2 - 12x + 35 = 0$. Yhtälön ratkaisu on

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 35}}{2} = \frac{12 \pm 2}{2} = 6 \pm 1 \text{ eli } x = 5 \text{ tai } x = 7.$$

b) Huipussa $D(x^2 - 12x + 35) = 0 \iff 2x - 12 = 0 \iff x = 6$. Toinen koordinaatti on $y = 6^2 - 12 \cdot 6 + 35 = -1$.

Vastaus: a) Pisteissä (5, 0) ja (7, 0), b) (6, -1).

5. a) $\sum_{n=0}^{22} (3 + 4n) = 23 \cdot \frac{3 + (3 + 4 \cdot 22)}{2} = 23 \cdot 47 = 1081$.

b) $\sum_{n=2}^{15} (-3)^n = (-3)^2 \cdot \frac{1 - (-3)^{14}}{1 - (-3)} = -10\,761\,678$.

Vastaus: a) 1081, b) -10 761 678.

6. Amerikkalaisen auton kulutus litroina/(100 km) on $\frac{3,785}{0,01 \cdot 1,609 \cdot 32} = 7,3512 > 6,8$.

Vastaus: Japanilainen auto kuluttaa vähemmän.

7. a)

Planeetta	Merkurius	Venus	Maa	Mars	Jupiter
x	0,241	0,615	1,0	1,881	11,861
$\sqrt[3]{x}$	0,622	0,850	1,000	1,234	2,281
y	0,387	0,723	1,0	1,523	5,203
\sqrt{y}	0,622	0,850	1,000	1,234	2,281

b) Kaava on $\sqrt{y} = \sqrt[3]{x}$ eli $y = (\sqrt[3]{x})^2$ eli $y = x^{2/3}$.

c) Etäisyys on $29,457^{2/3} \approx 9,538$ astronomista yksikköä.

8. a) Täyhteistä voidaan valita 2 erilaista $\binom{15}{2} = 105$ eri tavalla ja 3 erilaista $\binom{15}{3} = 455$ eri tavalla. Täyte voidaan siis valita kaikkiaan 560 eri tavalla. Pohjia on 3 erilaista, joten erilaisia pitsoja on kaikkiaan $3 \cdot 560 = 1680$. Näiden syömiseen yksi päivässä viitenä päivänä viikossa menee $\frac{1680}{5} = 336$ viikkoa eli noin 6,5 vuotta.

b) Erilaiset pitsat maksavat yhteensä $560(7,5 + 8,5 + 10,5) + 455 \cdot 3 = 16\,205$ (euroa), joten pitsan keskimääräinen hinta on $\frac{16\,205}{1680} \approx 9,6458$ (euroa).

Vastaus: a) 336 viikkoa, b) 9,65 euroa.

9. a) Jos kuusikulmion kaksi vierekkäistä kärkeä yhdistetään keskipisteeseen, syntyy tasasivuinen kolmio, jonka sivun pituus on r . Tästä näkyy, että leveys $x = 2r$.

b) Yhdistämällä kolme vierekkäistä kärkeä keskipisteeseen saadaan kaksi tasasivuista kolmiota, joissa sivun pituus on r . Kuusikulmion korkeus y on näiden kolmioiden korkeuksien summa eli $y = 2 \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$.

c) Kuusikulmio jakautuu kärjistä keskipisteeseen piirretyillä janoilla kuuteen tasaviuiseen kolmioon, joiden pinta-alojen summa on $6 \cdot \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{2}$. Kuusikulmion ja ympyrän väliin jäävän alueen ala on $\frac{3r^2\sqrt{3}}{2} - \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

Vastaus: a) $x = 2r$, b) $y = r\sqrt{3}$, c) pinta-ala on $r^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

10. Leikataan kartiota sen korkeusjanan kautta kulkevalla tasolla, jolloin syntyy kolmio ja sen sisällä oleva suorakulmio. Suorakulmion kummallakin puolella on suorakulmainen kolmio, jonka korkeus on lieriön korkeus d ja kanta $d/2$. Kartion korkeusjana jakaa suorakulmion yläpuolella olevan kolmion kahdeksi kolmioksi, jotka ovat yhteneviä suorakulmion vieressä olevien kolmioiden kanssa. Näin ollen niidenkin korkeus on d . Siitä saadaan kartion korkeudeksi $2d$. Kartion pohjaympyrän säde on d , joten kartion tilavuus $V_K = \frac{1}{3}\pi d^2 \cdot 2d$. Lieriön tilavuus $V_L = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 d$. Tilavuuksien suhde on $\frac{V_L}{V_K} = \frac{\pi d^3}{4} \cdot \frac{3}{2\pi d^3} = \frac{3}{8} = 0,375$.

Vastaus: 37,5 %.

11. a) Naisen pituudelle x pätee $41 = 0,43x - 27$, josta $x = \frac{41 + 27}{0,43} \approx 158,1395$ (cm).
 b) Miehen sääriluun pituus on mallin mukaan $y = 0,45 \cdot 175 - 31 = 47,75 \gg 42$. Näin ollen kyseessä ei ole saman henkilön sääriluu.
Vastaus: a) 158 cm, b) ei ole.
12. Väkiluvun v malli on $v = Ce^{at}$, missä t on aika vuosina vuodesta 2004 ja a sekä C parametreja, jotka pitäisi määrätä.
 Vuoden 2004 väkiluvusta saadaan $6,4 = Ce^{a \cdot 0} \implies C = 6,4$.
 Vuoden 2010 väkiluvusta saadaan nyt $6,8 = 6,4e^{6a} \iff e^{6a} = \frac{6,8}{6,4}$. Ottamalla logaritmit saadaan $6a \ln e = \ln \frac{6,8}{6,4}$, josta $a = \frac{1}{6} \ln \frac{6,8}{6,4} \approx 0,010104$. Jos väkiluku ylittää 10 miljardia vuonna $2004 + t$, on $10 < 6,4e^{at} \iff t > \frac{1}{a} \ln \frac{10}{6,4} \approx 44,169$. Siis vuosi on $2004 + 45 = 2049$.
Vastaus: Vuonna 2049.
13. Karoliina saa lähdeveron maksamisen jälkeen korkoa $10\,000 \cdot 0,022 \cdot 0,70 = 154$ (euroa), joten hänellä on vuoden päästä 10 154 euroa.
 Petteri saa ensimmäisestä talletuksesta puolen vuoden jälkeen korkoa lähdeveron maksamisen jälkeen $10\,000 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,0235 \cdot 0,70 = 82,25$ (euroa), joten hänellä on silloin pääomaa 10 082,25 euroa. Toisen puolen vuoden talletuksen korko on lähdeveron maksamisen jälkeen $10\,082,25 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,020 \cdot 0,70 = 70,58$ (euroa), joten hänellä on silloin pääomaa $10\,082,25 + 70,58 = 10\,152,83$ (euroa), mikä jää alle Karoliinan pääoman.
Vastaus: Karoliina teki paremman sijoituksen ja sen arvo oli 10 154 euroa.
14. Siirrytään normitettuun normaalijakaumaan muunnoksella $z = \frac{x - 0,215}{0,005}$. Tässä jakaumassa lisäaineen pitoisuuden sallittu raja on $z_0 = \frac{0,225 - 0,215}{0,005} = 2$.
 Nyt $P(x \leq 0,225) = P(z \leq 2) = \Phi(2) = 0,9772$, joten $P(x > 0,225) = P(z > 2) = 1 - \Phi(2) = 0,0228$.
Vastaus: Todennäköisyydellä 0,0228.
15. Vektori $\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB} = 7\vec{i} + 9\vec{j} + 3\vec{k} - (6\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}) = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.
 Paikkavektori $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} = \overline{OA} + \overline{BC} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} + (\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}) = 5\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$.
 Lävistäjävektori $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = 7\vec{i} + 9\vec{j} + 3\vec{k} - (4\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) = 3\vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k}$.
 Lävistäjävektori $\overline{BD} = \overline{OD} - \overline{OB} = 5\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k} - (6\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}) = -\vec{i} + \vec{j}$.
Vastaus: $\overline{OD} = 5\vec{i} + 6\vec{j} + 2\vec{k}$, $\overline{AC} = 3\vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k}$, $\overline{BD} = -\vec{i} + \vec{j}$.