Pitkä matematiikka 28.9.2012, ratkaisut:

1. **a)** $2(1-3x+3x^2)=3(1+2x+2x^2) \iff 2-6x+6x^2=3+6x+6x^2 \iff$
$12x=-1 \iff x=-\dfrac{1}{12}.$

b) Jos $x>0$, on $|x|=1+x \iff x=1+x$. Tällä ei ole ratkaisua.
Jos $x\le 0$, on $|x|=1+x \iff -x=1+x \iff x=-\frac{1}{2}$.

c) $1-x=\dfrac{1}{1-x} \iff (1-x)^2=1 \iff 1-x=\pm 1 \iff x=0$ tai $x=2$.

Vastaus: **a)** $x=-\frac{1}{12}$, **b)** $x=-\frac{1}{2}$, **c)** $x=0$ tai $x=2$.

2. **a)** $(x+\dfrac{1}{x})^2-(x-\dfrac{1}{x})^2=x^2+2+(\dfrac{1}{x})^2-(x^2-2+(\dfrac{1}{x})^2)=2+2=4.$

b) $\dfrac{x^2-9}{x+3}=\dfrac{(x+3)(x-3)}{x+3}=x-3.$

c) $\ln\dfrac{x}{2}+\ln\dfrac{e^x}{x}+\ln 2=\ln(\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{e^x}{x}\cdot 2)=\ln e^x=x.$

Vastaus: **a)** 4, **b)** $x-3$, **c)** x.

3. **a)** $f'(x)=D(\dfrac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x))=\dfrac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+\dfrac{1}{2}e^x(\cos x-\sin x)=$
$\dfrac{1}{2}e^x(2\cos x)=e^x\cos x$. Siten $f'(0)=e^0\cos 0=1$.

b) $\displaystyle\int_0^\pi(1+\sin\frac{x}{3})\,dx=\Big/_{\!0}^{\pi}\, x-3\cos\frac{x}{3}=\pi-3\cos\frac{\pi}{3}+3\cos 0=\pi+\frac{3}{2}.$

Vastaus: **a)** $f'(0)=1$, **b)** $\pi+\frac{3}{2}$.

4. **a)** Kun $\alpha\in[\pi,\dfrac{3\pi}{2}]$, on $\sin\alpha\le 0$, joten

$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-(-\dfrac{1}{3})^2}=-\sqrt{\dfrac{8}{9}}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3},$

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot(-3)=2\sqrt{2}.$

b) Kosinilauseen mukaan $a^2=2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cos 30^\circ=4+9-12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=13-6\sqrt{3}$.
Siis $a=\sqrt{13-6\sqrt{3}}\approx 1{,}614836$.

Vastaus: **a)** $\sin\alpha=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\tan\alpha=2\sqrt{2}$, **b)** $a=\sqrt{13-6\sqrt{3}}\approx 1{,}61$.

5. Polynomin $f(x)=x^3-6x^2-15x+2$ derivaatta on $f'(x)=3x^2-12x-15$. Derivaatta häviää, kun $x=\dfrac{12\pm\sqrt{12^2+4\cdot 3\cdot 15}}{6}=\dfrac{12\pm 18}{6}$ eli kun $x=5$ tai $x=-1$. Näistä vain $5\in[2,\,6]$. Koska $f(2)=-44$, $f(5)=-98$ ja $f(6)=-88$, antaa $f(2)$ suurimman ja $f(5)$ pienimmän arvon.

Vastaus: Suurin arvo on -44 ja pienin -98.

6. Paraabelin $y^2 = 4x$ akseli on positiivinen x-akseli ja sen huippu on origossa. Paraabelin ja suoran $4x - 3y = 4$ leikkauspisteiden y-koordinaatit saadaan yhtälöstä

$y^2 = 3y + 4 \Longleftrightarrow y^2 - 3y - 4 = 0$. Tämän ratkaisu on $y = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \dfrac{3 \pm 5}{2}$

eli $y = -1$ tai $y = 4$. Vastaavat x-koordinaatit ovat $x = \dfrac{(-1)^2}{4} = \dfrac{1}{4}$ ja $x = \dfrac{4^2}{4} = 4$.

Näillä tiedoilla voidaan piirtää kuvio tilanteesta.

Paraabelin ja suoran väliin jäävän rajoitetun alueen pinta-ala on

$$\int_{-1}^{4} (\frac{3}{4}y + 1 - \frac{1}{4}y^2)\,dy = \Big/_{-1}^{4} \frac{3}{8}y^2 + y - \frac{1}{12}y^3 = \frac{3}{8}\cdot 16 + 4 - \frac{64}{12} - (\frac{3}{8} - 1 + \frac{1}{12}) =$$
$$\frac{125}{24} \approx 5{,}208333.$$

Vastaus: $\frac{125}{24} \approx 5{,}21$.

7. **a)** Havainnoista saadaan $20 = k \cdot 10{,}2^b$ ja $6 = k \cdot 0{,}0158^b$. Ottamalla kummastakin logaritmit saadaan $\ln 20 = \ln k + b \ln 10{,}2$ ja $\ln 6 = \ln k + b \ln 0{,}0158$. Vähentämällä yhtälöt toisistaan saadaan $b = \dfrac{\ln 20 - \ln 6}{\ln 10{,}2 - \ln 0{,}0158} \approx 0{,}186082$ ja edelleen

$k = 20 \cdot 10{,}2^{-b} \approx 12{,}982193$.

b) Malli antaa edellisillä arvoilla k ja b La Palman lintulajien määräksi $n = k \cdot 708^b \approx 44{,}02373$.

Vastaus: **a)** $k \approx 0{,}186$ ja $b \approx 13{,}0$, **b)** 44 lintulajia.

8. **a)** Merkitään $P(n)$:llä todennäköisyyttä sille, että professori pitää viikossa n luentoa. Tällöin $P(5) = 0{,}8^5 = 0{,}32768$.

b) Kysytty todennäköisyys on $P(4) = \binom{5}{4} 0{,}2 \cdot 0{,}8^4 = 0{,}4096$.

c) Lasketaan muiden luentomäärien todennäköisyydet.

$P(0) = 0{,}2^5 = 0{,}00032$, $\quad P(1) = \binom{5}{1} 0{,}2^4 \cdot 0{,}8 = 0{,}0064$,

$P(2) = \binom{5}{2} 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}0512$, $P(3) = \binom{5}{3} 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^3 = 0{,}2048$.

Odotusarvo $E = 0P(0) + P(1) + 2P(2) + 3P(3) + 4P(4) + 5P(5) = 4$.

Vastaus: **a)** 0,33, **b)** 0,41, **c)** 4.

9. **a)** $\overline{a} \cdot \overline{b} = (\cos\phi - 2\sin\phi)(\cos\phi + \sin\phi) + 1 + (\sin\phi + 2\cos\phi)(\sin\phi - \cos\phi) =$ $1 - (\sin^2\phi + \cos^2\phi) = 1 - 1 = 0$. Koska pistetulo on aina nolla, ovat vektorit kohtisuorassa toisiaan vastaan kaikilla $\phi \in \mathbb{R}$.

b) Jos $\phi = 0$, on $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} + 2\overline{k}$ ja $\overline{b} = \overline{i} + \overline{j} - \overline{k}$. Nyt $s\overline{a} + t\overline{b} = (s+t)\overline{i} + (s+t)\overline{j} + (2s-t)\overline{k}$. Tämä on $\overline{i} - \overline{j}$ vain jos $s + t = 1$, $s + t = -1$ ja $2s - t = 0$. Kaksi ensimmäistä yhtälöä ovat ristiriitaiset, joten tällaisia kertoimia s ja t ei ole olemassa.

10. Yhtälön ratkaisujen määrä on sama kuin erotusfunktion $f(x) = e^{x+a} - x$ nollakohtien määrä. Funktion derivaatta $f'(x) = e^{x+a} - 1$ häviää, kun $e^{x+a} = 1 = e^0$ eli kun $x+a = 0 \iff x = -a$. Selvästi $f'(x) < 0$, kun $x < -a$ ja $f'(x) > 0$, kun $x > -a$. Näin ollen $f(x)$ saa pienimmän arvonsa kohdassa $x = -a$ ja $f(-a) = e^{-a+a} - (-a) = 1+a$. Kun $x < -a$, on $f(x)$ aidosti vähenevä ja kun $x > -a$ on $f(x)$ aidosti kasvava. Tämän perusteella nähdään yhtälön ratkaisujen määrä eri arvoilla a.

Yhtälöllä ei ole ratkaisuja, jos $f(-a) > 0 \iff 1 + a > 0 \iff a > -1$.

Yhtälöllä on yksi ratkaisu, jos $f(-a) = 0 \iff 1 + a = 0 \iff a = -1$.

Yhtälöllä on kaksi ratkaisua, jos $f(-a) < 0 \iff 1 + a < 0 \iff a < -1$.

11. **a)** Tarkastellaan geometrista jonoa a_0, a_1, a_2, a_3, ..., missä $a_n = aq^n$. Jos a_m ja a_{m+1} ovat rationaalisia, on $q = \dfrac{aq^{m+1}}{aq^m} = \dfrac{a_{m+1}}{a_m}$ rationaalilukujen osamääränä rationaalinen. Samoin q^n on aina rationaalinen kaikilla $n \in Z$. Edelleen $a = a_m q^{-m}$ on rationaalilukujen tulona rationaalinen. Koska a ja q ovat rationaalisia, on jonon jokainen termi rationaalilukujen tulona rationaaliluku.

b) Olkoon sitten kokonaisluvut m ja n, $m < n$ siten, että aq^m ja aq^n ovat rationaaliset. Niiden osamäärä on myös rationaalinen eli $q^{n-m} = \dfrac{aq^n}{aq^m}$ on rationaalinen. Tällöin myös $q^{p(n-m)}$ on rationaalinen kaikilla kokonaisluvuilla p. Koska aq^m ja $q^{p(n-m)}$ ovat rationaalisia, on niiden tulo $aq^{m+p(n-m)}$ rationaalinen kaikilla kokonaisluvuilla p. Tämä osoittaa, että jonossa on äärettömän monta rationaalista termiä $a_{m+p(n-m)}$.

12. Puolisuunnikassäännön mukaan $\dfrac{1}{24}\displaystyle\int_0^{24} f(t)dt \approx$

$\dfrac{3}{24}(\dfrac{1}{2}f(0) + f(3) + f(6) + f(9) + f(12) + f(15) + f(18) + f(21) + \dfrac{1}{2}f(24))=$

$\dfrac{1}{8} \cdot 115{,}2 = 14{,}4.$

Vastaus: 14,4 astetta.

13. $\ln(4x + 3) - \ln(3x + 4) = \ln \dfrac{4x + 3}{3x + 4} = \ln \dfrac{4 + \frac{3}{x}}{3 + \frac{4}{x}}$, kun $x > 0$. Koska $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on

$\lim_{x\to\infty}(\ln(4x + 3) - \ln(3x + 4)) = \lim_{x\to\infty} \ln \dfrac{4 + \frac{3}{x}}{3 + \frac{4}{x}} = \ln \dfrac{4 + 0}{3 + 0} = \ln \dfrac{4}{3}.$

Vastaus: $\ln \dfrac{4}{3}$.

***14.** **a)** Jotta tehtävässä määritelty funktio $f(x)$ olisi tiheysfunktio, on oltava $f(x) \geq 0$ ja sen integraali $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Kuvauksen perusteella $f(x) \geq 0$. Funktion integraalin arvo on sen kolmion ala, jonka kanta on väli [15,50; 25,50] ja jonka korkeus h on kohdassa $x = 20{,}50$. Näin ollen $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}(25{,}50 - 15{,}50)h = 5h$. Korkeudelle h saadaan ehto $5h = 1$, josta $h = \frac{1}{5}$.

Välillä $[15{,}50; 20{,}50]$ on $f(x)$ suora, jonka kulmakerroin $k_1 = \dfrac{0{,}2 - 0}{20{,}50 - 15{,}50} = \dfrac{1}{25}$.

Välillä $[20{,}50; 25{,}50]$ on $f(x)$ suora, jonka kulmakerroin $k_2 = \dfrac{0 - 0{,}2}{25{,}50 - 20{,}50} = -\dfrac{1}{25}$.

Nyt voidaan muodostaa tiheysfunktion $f(x)$ lauseke.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in]-\infty; 15{,}50] \\ \dfrac{1}{25}x - \dfrac{31}{50}, & \text{kun } x \in]15{,}50; 20{,}50] \\ -\dfrac{1}{25}x + \dfrac{51}{50}, & \text{kun } x \in]20{,}50; 25{,}50] \\ 0, & \text{kun } x \in]25{,}50; \infty[. \end{cases}$$

b) Kysytty todennäköisyys $P(x \leq 19) = \int_{-\infty}^{19} f(x)\,dx = \int_{15,5}^{19} (\frac{1}{25}x - \frac{31}{50})\,dx = \mathop{/}\limits_{15,5}^{19} \frac{1}{50}x^2 - \frac{31}{50}x = 0{,}245$.

c) Jotta muutettu funktio $g(x)$ olisi tiheysfunktio, on oltava $g(x) \geq 0$ ja $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = 1$. Selvästi $g(x) \geq 0$. Funktion integraalin arvo on sen kolmion ala, jonka kanta on väli [15,50; 30,50] ja jonka korkeus h_2 on kohdassa $x = 20{,}50$. Näin ollen $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}(30{,}50 - 15{,}50)h_2 = 7{,}5h_2$. On oltava $7{,}5h_2 = 1$, josta $h_2 = \frac{2}{15}$.

Välillä $[15{,}50; 20{,}50]$ on $g(x)$ suora, jonka kulmakerroin $k_3 = \dfrac{2/15 - 0}{20{,}50 - 15{,}50} = \dfrac{2}{75}$.

Välillä $[20{,}50; 30{,}50]$ on $g(x)$ suora, jonka kulmakerroin $k_4 = \dfrac{0 - 2/15}{30{,}50 - 20{,}50} = -\dfrac{1}{75}$.

Nyt voidaan muodostaa tiheysfunktion $g(x)$ lauseke.

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in]-\infty; 15{,}50] \\ \dfrac{2}{75}x - \dfrac{31}{75}, & \text{kun } x \in]15{,}50; 20{,}50] \\ -\dfrac{1}{75}x + \dfrac{61}{150}, & \text{kun } x \in]20{,}50; 30{,}50] \\ 0, & \text{kun } x \in]30{,}50; \infty[. \end{cases}$$

Uuden jakauman odotusarvo

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)\,dx = \int_{15,5}^{20,5} (\frac{2}{75}x^2 - \frac{31}{75}x)dx + \int_{20,5}^{30,5} (-\frac{1}{75}x^2 + \frac{61}{150}x)dx =$$

$$\mathop{/}\limits_{15,5}^{20,5} \frac{2}{225}x^3 - \frac{31}{150}x^2 + \mathop{/}\limits_{20,5}^{30,5} -\frac{1}{225}x^3 + \frac{61}{300}x^2 = 6\frac{5}{18} + 15\frac{8}{9} = 22\frac{1}{6} \approx 22{,}17 \text{ (euroa)}.$$

***15. a)** Olkoon lieriön pohjan säde r ja lieriön korkeuden suhde pohjan säteeseen x, missä $x > 0$. Tällöin lieriön korkeus on xr. Pallon säteelle s saadaan nyt lauseke $s = \sqrt{r^2 + (\frac{1}{2}xr)^2} = r\sqrt{1 + \frac{1}{4}x^2}$. Pallon pinta-ala on $A_P = 4\pi s^2 = 4\pi r^2(1 + \frac{1}{4}x^2)$ ja lieriön koko pinta-ala $A_L = 2\pi r(xr) + 2\pi r^2 = 2\pi r^2(1+x)$. Siis $t = \dfrac{A_P}{A_L} = \dfrac{2(1 + \frac{1}{4}x^2)}{1 + x}$. Tästä saadaan x:lle yhtälö $t(1 + x) = 2(1 + \frac{1}{4}x^2) \iff \frac{1}{2}x^2 - tx + 2 - t = 0$, jonka ratkaisu on $x = \dfrac{t \pm \sqrt{t^2 - 2(2 - t)}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = t \pm \sqrt{t^2 + 2t - 4}$.

b) Koska t on pinta-alojen suhde, on $t > 0$. Jos $t^2 + 2t - 4 < 0$, ei $x \in \mathbb{R}$, eikä tällaista lieriötä voi olla olemassa. Ylöspäin aukeavan paraabelin $y = t^2 + 2t - 4$ nollakohdat ovat $t = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$, joten $t^2 + 2t - 4 < 0$, kun $-1 - \sqrt{5} < t < -1 + \sqrt{5}$. Tällaista lieriötä ei voi olla olemassa, kun $0 < t < -1 + \sqrt{5}$.

c) Jos $t = \sqrt{5} - 1$, on $x = t + 0 = \sqrt{5} - 1$ eli on täsmälleen yksi tällainen lieriö. Tasan yksi ratkaisu voi tulla myös sellaisilla arvoilla t, joilla $x = t - \sqrt{t^2 + 2t - 4}$ ei toteuta ehtoa $x > 0$. Näin käy, jos $t \leq \sqrt{t^2 + 2t - 4} \iff t^2 \leq t^2 + 2t - 4 \iff t \geq 2$.

d) Edellisen kohdan mukaan sekä $x = t + \sqrt{t^2 + 2t - 4}$ että $x = t - \sqrt{t^2 + 2t - 4}$ kelpaavat ratkaisuiksi, jos $\sqrt{5} - 1 < t < 2$.

Vastaus: **a)** Suhde on $t \pm \sqrt{t^2 + 2t - 4}$, **b)** tällaista lieriötä ei voi olla olemassa, kun $0 < t < \sqrt{5} - 1$, **c)** on tasan yksi lieriö, kun $t = \sqrt{5} - 1$ tai $t \geq 2$, **d)** on kaksi lieriötä, kun $\sqrt{5} - 1 < t < 2$.