Simo K. Kivelä

Ruprecht von der Pfalzin probleema

Ruprecht von der Pfalz oli 1600-luvulla elänyt saksalais-englantilainen prinssi. Isä oli saksalainen kuningas Fredrik V, äiti Englannin kuninkaan Jaakko I:n tytär. Ruprecht eli nuoruutensa maanpaossa Hollannissa, myöhempinä vuosinaan osallistui eri tavoin vuosisadan levottomuuksiin, ennen muuta Englannissa tasavaltalaisten ja kuningasmielisten välisiin taisteluihin. [1]

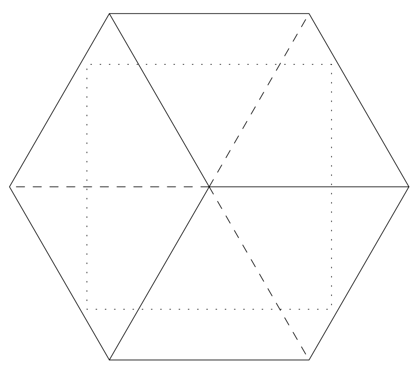
Sotajoukkojen johtamisen ohella Ruprecht oli kiinnostunut myös taiteista ja luonnontieteiden tutkimisesta. Hänen nimensä on jäänyt elämään *Ruprecht von der Pfalzin probleemassa*:

Millainen reikä on työstettävä (massiiviseen) kuutioon, jotta siitä voidaan työntää läpi toinen samankokoinen kuutio?

Ensi näkemällä tuntuu siltä, että probleemalla ei voi olla ratkaisua. On kuitenkin melko helppoa osoittaa, että ratkaisu on olemassa.

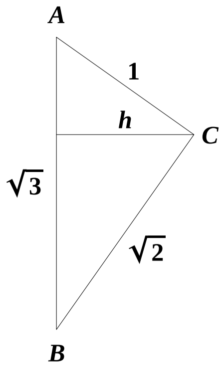
Ratkaisun olemassaolo

Asetetaan kuutio seisomaan kärjelleen vaakasuoralle tasolle. Tällöin vastakkainen kärki on täsmälleen seisontakärjen yläpuolella, ja jos kuutio projisioidaan yhdensuuntaisprojektiolla kohtisuoraan vaakasuoralle tasolle, sen ääriviiva on säännöllinen kuusikulmio. (Kuva 1)



Kuva 1: Kärjellään seisova kuutio päältä nähtynä. Alapuolella olevat särmät katkoviivoilla. Pisteviivoilla piirretty neliö on toinen samankokoinen kuutio, joka lepää sivutahkonsa varassa.

Sivusta katsottuna kuution oikea puolisko on kuvan 2 mukainen. Piste A on kuution ylin ja B sen alin kärki, AC on kuution särmä, jonka pituudeksi yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan 1. Jana BC on kuution sivutahkon lävistäjä ja siis pituudeltaan $\sqrt{2}$. Kuution avaruuslävistäjän AB pituus on $\sqrt{3}$. Koska kolmio ABC on suorakulmainen, voidaan korkeusjanan pituus helposti laskea: $h = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Tämä on kuvan 1 kuusikulmion ympäri piirretyn ympyrän säde.



Kuva 2: Kärjellään seisovan kuution oikean puoliskon leikkaus. Pisteet A ja B ovat ylin ja alin kärki, piste C äärimmäinen kärki oikealla.

Kuvassa 1 pisteviivalla piirretty neliö esittää kuutiota, joka lepää vaakasuoralla tasolla yhdellä sivutahkollaan ja jonka särmän pituus on myös 1. Kun kuusikulmion ympäri piirretyn ympyrän säde h tunnetaan, on helppoa laskemalla todeta, että neliö sopii kuusikulmion sisään. Jos siis alkuperäiseen kuutioon työstetään lävistäjän AB suunnassa poikkileikkaukseltaan neliönmuotoinen reikä, jossa neliön sivun pituus on 1, voidaan tästä reiästä työntää läpi toinen samankokoinen kuutio.

Reiällisen kuution havainnollistaminen geometrisesti

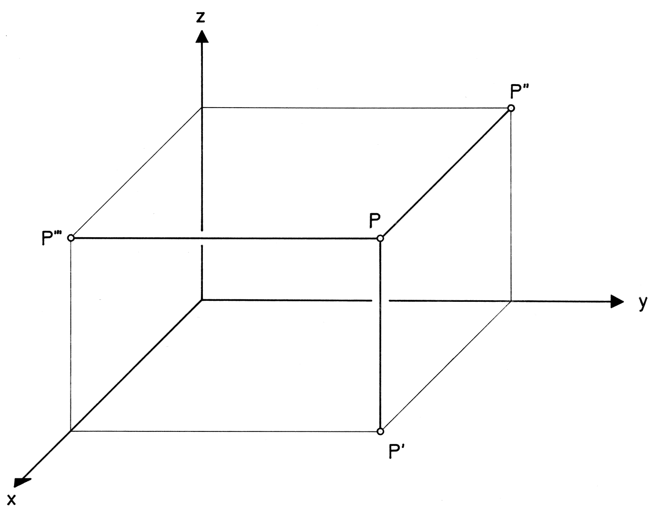
Vaikka kuva 1 esittääkin kuutiota ja siihen työstettyä reikää sopivasta suunnasta katsottuna, ei kuvan perusteella ole aivan helppoa päätellä, miltä reiällinen kuutio oikeastaan näyttää. Voidaan myös kysyä, voitaisiinko reikä työstää jossakin muussakin kuin lävistäjän suunnassa.

Havainnollisia kuvia voidaan muodostaa periaatteessa kahdella tavalla. Perinteinen — jo muutamia vuosisatoja vanha — menettely perustuu sopivan yhdensuuntaisprojektiokuvan konstruoimiseen *deskriptiivisen geometrian* menetelmillä. Modernimpi vaihtoehto on tietotekniikan hyödyntäminen, jolloin luontevin työkalu on jokin kolmiulotteisen geometrian käsittelyyn sopiva ohjelmisto. Tällaisia ovat monet ns. matemaattiset laskentaohjelmistot, mutta myös teollisuuden suunnittelutehtävissä käytettävät CAD- (Computer Aided Design) ohjelmistot, joissa monien muiden ominaisuuksien ohella on työkalut geometristen konstruktioiden tekemiseen.

Mongen projektio, deskriptiivisen geometrian perustyökalu

Gaspard Monge oli Napoleonin aikalainen, upseeri ja matemaatikko, joka osallistui Napoleonin sotaretkiin ja kehitti sotilaallista käyttöä varten geometriset suunnittelumenetelmät, jotka kantavat hänen nimeään. Hän loi nämä jo ennen Ranskan vallankumousta, mutta ne olivat sotasalaisuuksia ja julkaistiin vasta joitakin vuosia vallankumouksen jälkeen. [2, 3]

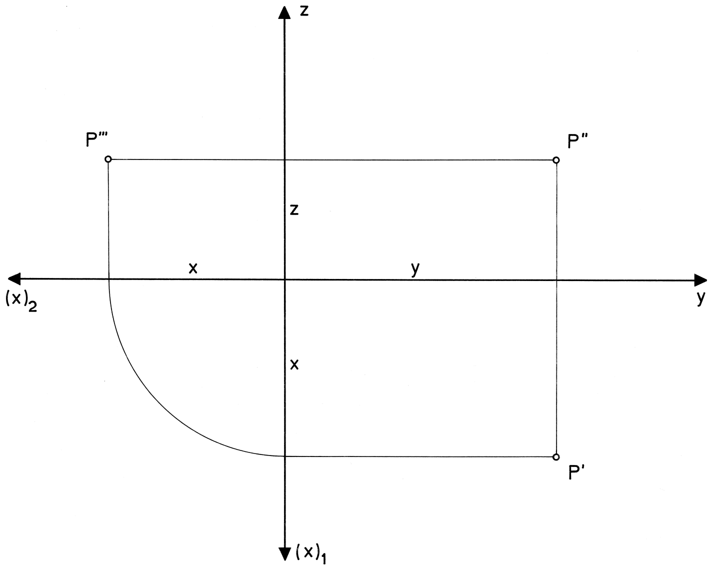
Mongen projektiossa kohde — geometrinen tilanne, kappale, suunniteltava esine tai laite — projisioidaan yhdensuuntaisprojektiolla kohtisuorasti toisaalta xy-tasoon, toisaalta yz-tasoon. Edellistä kutsutaan *perus-*, jälkimmäistä *pystyprojektioksi*. Kolmantena voi olla kohtisuora projektio xz-tasoon (*sivuprojektio*), mutta tätä harvoin tarvitaan. (Kuva 3.)



Kuva 3: Mongen projektion syntyminen

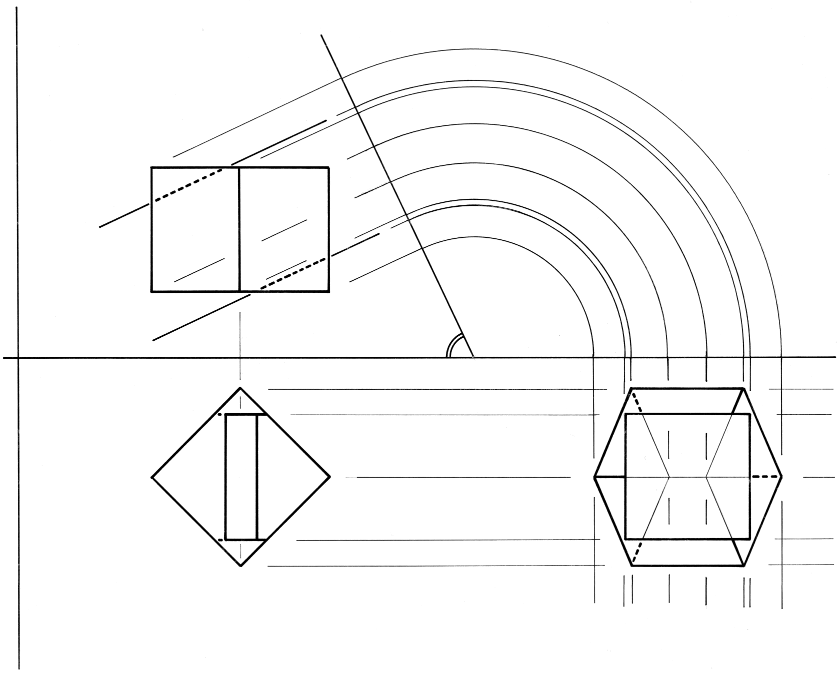
Kaikki kolme projektiota esitetään samassa tasossa (piirustuspaperin tasossa) siten, että perusprojektio käännetään y-akselin ympäri ja sivuprojektio z-akselin ympäri yz-tasoon, jolloin syntyy kuvan 4 mukainen tilanne. Tässä on esitettynä vain yhden pisteen projektiot, mutta isommat kohteet projisioidaan periaatteessa pisteittäin.

Kuvassa 5 on Ruprecht von der Pfalzin probleema ratkaistuna Mongen projektiossa. Alkuperäinen kuutio näkyy perusprojektiossa 45°kierrettynä. Pystyprojektiossa näytetään, miten kuutio projisioidaan kohtisuorasti kaltevalle tasolle. Tämän kaltevuuskulmaa voidaan helposti muuttaa eikä se kuvassa olekaan sellainen, että projisiointisuunta olisi sama kuin kuution lävistäjän suunta. Kalteva taso leikkaa xy-tasoa pitkin x-akselin suuntaista suoraa ja se kierretään xy-tasoon tämän suoran ympäri. Tällöin perusprojektion puolelle saadaan näkyviin kuution projektio kaltevaan tasoon. Tämän sisään mahtuu neliö, jonka sivu on yhtä pitkä kuin kuution särmä. Näin on osoitettu, että valitussa suunnassa kuutioon voidaan työstää reikä, josta samankokoinen kuutio mahtuu läpi. Viitteessä [4] on sama ratkaisu Java-sovelmana.



Kuva 4: Mongen projektion perus-, pysty- ja sivuprojektio

Havainnollista kuvaa reiällisestä kuutiosta ei tässäkään ole saatu. Käytettävissä on kuitenkin kolmekin yhdensuuntaisprojektioprojektiokuvaa reiällisestä kuutiosta.

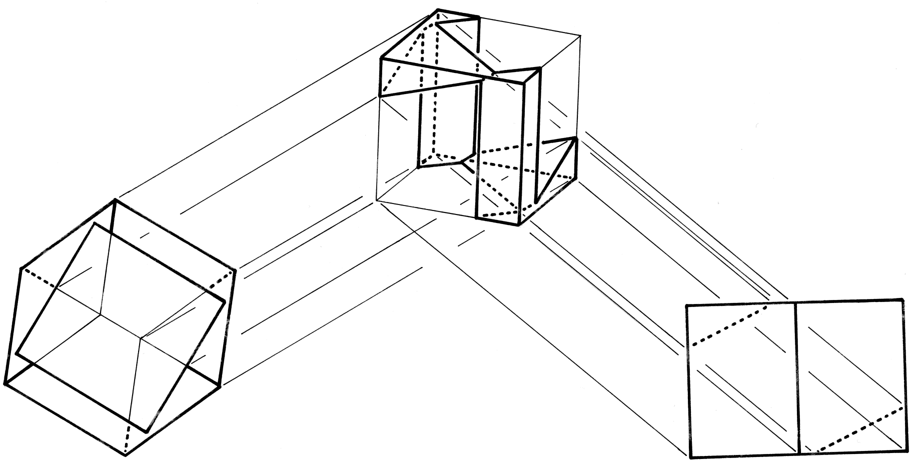


Kuva 5: Ruprecht von der Pfalzin probleeman ratkaisu Mongen projektiossa

Schmidin–Eckhartin menetelmä

Havainnollinenkin kuva kuutiosta on mahdollista saada suhteellisen yksinkertaisella piirtämismenettelyllä.

1900-luvun alkupuolella itävaltalaiset Th. Schmid ja L. Eckhart esittivät menetelmän, jolla kohteen kahden projektiokuvan perusteella voidaan muodostaa uusi yhdensuuntaisprojektiokuva kohteesta. Lähtökohtana olevat projektiokuvat asetetaan piirustustasoon sopivaan asemaan ja kumpaakin kuvaa varten valitaan kiinteä suunta; nämä eivät saa olla yhdensuuntaiset. Tietyn pisteen kuvapiste uudessa kuvassa saadaan asettamalla suuntien mukaiset suorat alkuperäisten kuvien vastinpisteiden kautta ja määrittämällä näiden leikkauspiste. Uusi kuva voidaan tällä tavoin piirtää piste pisteeltä.



Kuva 6: Ruprecht von der Pfalzin probleeman ratkaisu Schmidin–Eckhartin menetelmällä laadittuna

Lähtökohtana olevat kuvat voidaan periaatteessa asettaa mihin tahansa asemaan ja suunnat valita miten tahansa. Tuloksena syntyy yleensä uusi yhdensuuntaisprojektiokuva kohteesta; erikoistapauksessa se voi litistyä suoraksi. Kuva voi kuitenkin liittyä niin vinoon yhdensuuntaisprojektioon (jossa projektiosäde ei ole kohtisuorassa kuvatasoa vastaan), että se ei ole kovin havainnollinen. Sopivien asemien ja suuntien määrittämiseen on kuitenkin olemassa menetelmät.

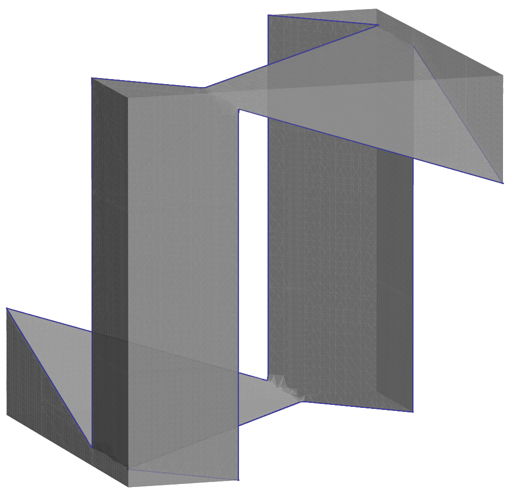
Kuva 6 esittää reiällisen kuution kuvan konstruoimisen lähtemällä kahdesta Mongen projektion avulla saadusta projektiokuvasta.

Tarkempia tietoja Schmidin–Eckhartin menetelmästä, joka saksaksi tunnetaan nimillä *Einschneideverfahren* ja *Schnellrißverfahren*, on löydettävissä viitteistä [6, 5]. Jälkimmäisessä on Java-sovelma, jolla asetteluja ja suuntia voidaan muuttaa.

Reiällisen kuution havainnollistaminen laskemalla

Edellä esitetty menettely on luonteeltaan geometrinen, piirtämiseen perustuva. Tietotekniikan käyttö on pikemminkin algebrallista, usein varsin vaativaan laskemiseen perustuvaa.

Kuva 7 esittää Ruprecht von der Pfalzin probleeman ratkaisua, joka on laskettu ja piirretty laskentaohjelma Mathematicalla [7].



Kuva 7: Mathematicalla tehty Ruprecht von der Pfalzin probleeman ratkaisu

Kuvaa varten laadittu koodi on annettu alla. Kuutio on tällöin asetettu siten, että sen keskipiste on origossa, särmät akseleiden suuntaisia ja särmän pituus = 2.

```
n = {1, 1, a}; h = {1, 1, 0};
rtk = Solve[ArcCos[n.h/Sqrt[n.n]/Sqrt[h.h]] == 25 Degree, a] // N;
n = n/Sqrt[n.n] /. rtk[[2]];
k = {0, 0, 1};
ex = Cross[k, n]; ex = ex/Sqrt[ex.ex]; ey = Cross[n, ex];
rtk = Solve[{x, y, z} == a ex + b ey + c n, {a, b, c}];
reika = Max[Abs[a], Abs[b]] /. rtk[[1]];
kuutio = Max[Abs[x], Abs[y], Abs[z]];
kuva1 = ContourPlot3D[reika == 1, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, {z, -2, 2},
   RegionFunction -> Function[{x, y, z}, kuutio <= 1], Mesh -> None,
   BoundaryStyle -> Automatic, ContourStyle -> Opacity[0.8],
   Lighting -> "Neutral",
   ColorFunction -> Function[{x, y, z}, GrayLevel[0.5]]];
kuva2 = ContourPlot3D[kuutio == 1, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, {z, -2, 2},
   RegionFunction -> Function[{x, y, z}, reika >= 1], Mesh -> None,
```

```
   BoundaryStyle -> Automatic, ContourStyle -> Opacity[0.8],
   Lighting -> "Neutral",
   ColorFunction -> Function[{x, y, z}, GrayLevel[0.5]]];
ruprkuva = Show[kuva1, kuva2, Boxed -> False, Axes -> None,
  ImageSize -> 600, ViewPoint -> {-30, 10, 6}]
```

Koodin muuttujien merkitykset ovat seuraavat:

- Vektori $\vec{n}$ ilmoittaa työstettävän reiän suunnan. Parametri a on määrätty siten, että kaltevuuskulma vaakatasoon (vektori $\vec{h}$) nähden on 25°.
- Vektorit $\vec{e}_x$ ja $\vec{e}_y$ ilmoittavat reiän poikkileikkausneliön sivujen suunnat. $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ ja $\vec{n}$ ovat yksikkövektoreita. $\vec{k}$ on pystysuora vektori, jota tarvitaan näiden laskemisessa.
- Kuution pinta määritellään yhtälöllä $\max\{|x|, |y|, |z|\} = 1$. Vastaavalla tavalla määritellään työstettävän reiän pinta muodossa $\max\{|a|, |b|\} = 1$, missä muuttujille a ja b on ensin laskettu lausekkeet (jälkimmäinen muuttuja `rtk`).
- Muuttuja `kuva1` esittää työstettävän reiän pintaa niiltä osin kuin se sijaitsee kuution sisällä ja `kuva2` kuution pinnan niitä osia, jotka jäävät jäljelle, kun reikä on työstetty. Yhdistämällä nämä muuttujaan `ruprkuva` saadaan kuva 7.

Viitteet

[1] Ruprecht von der Pfalz, Herzog von Cumberland, http://de.wikipedia.org/wiki/Ruprecht_von_der_Pfalz,_Herzog_von_Cumberland, (saks.)

[2] Gaspard Monge, http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Monge.html (engl.)

[3] Gaspard Monge, http://www.bibmath.net/bios/index.php3?action=affiche&quoi=monge (ransk.)

[4] Simo Kivelä, Ruprecht von der Pfalzin probleema, Cabri-Geometriaan pohjautuva Java-sovelma, http://matta.hut.fi/matta2/cabri/ruprecht.html

[5] Hermann Vogel, Allgemeines Einschneideverfahren, http://www-m10.ma.tum.de/~vogel/KG_Metall_Bau/Daten/Einschnitt_a.html (saks.)

[6] Walter Wunderlich, Darstellende Geometrie II, 234 s., Hochschultaschenbücher, Bibliographisches Institut AG, Mannheim, 1967 (saks.)

[7] Mathematica, laskentaohjelma, http://www.wolfram.com/