

# Determinantin ominaisuuksia

Matriisin  $A$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

determinantille pätevät seuraavat ominaisuudet:

- Transponointi ei vaikuta determinantin arvoon,

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Tämä tarkoittaa sitä, että determinantin yhteydessä sarakkeille pätevät säännöt pätevät myös riveille.

- Tulon determinantti on determinanttien tulo,

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

- Matriisin sarakkeen (tai rivin) kertominen vakiolla  $\lambda$  muuttaa determinantin arvon  $\lambda$ -kertaiseksi.

$$\begin{aligned} \det \left( \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & \lambda a_{1i} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & \lambda a_{2i} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & \lambda a_{ni} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \right) \\ = \lambda \det \left( \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1i} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2i} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{ni} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \right) \\ = \lambda \det(A) \end{aligned}$$

Jos  $A$ :n jokainen sarake on kerrottu samalla vakiolla  $\lambda$ , saadaan

$$\begin{aligned} \det(\lambda A) &= \det \left( \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix} \right) \\ &= \lambda^n \det \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \right) \\ &= \lambda^n \det(A). \end{aligned}$$

- Jos matriisin vektorit ovat lineaarisesti riippuvia, on matriisin determinantti 0. Jos vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia, on determinantin arvo erisuuri kuin 0 eli

$$\text{matriisin } A \text{ vektorit lineaarisesti riippuvia} \Leftrightarrow \det(A) = 0$$

Tästä seuraa, että jos  $A$ :ssa esiintyy kahdesti sama sarake (tai rivi), niin  $\det(A) = 0$ , koska tällöin  $A$ :n vektorit ovat lineaarisesti riippuvia.

- Matriisin kahden sarakkeen (tai rivin) paikan vaihtaminen vaihtaa determinantin etumerkin.

$$\det \left( \begin{bmatrix} \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots \end{bmatrix} \right) = -\det \left( \begin{bmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots \\ \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2i} & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{ni} & \cdots \end{bmatrix} \right)$$

- Kahden matriisin, jotka ovat yhtä saraketta lukuunottamatta samat, determinanttien summalle pätee seuraava:

$$\det \begin{pmatrix} \cdots & a_{1,i-1} & a_{1i} + a_{1i}^* & a_{1,i+1} & \cdots \\ \cdots & a_{2,i-1} & a_{2i} + a_{2i}^* & a_{2,i+1} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{n,i-1} & a_{ni} + a_{ni}^* & a_{n,i+1} & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cdots & a_{1,i-1} & a_{1i} & a_{1,i+1} & \cdots \\ \cdots & a_{2,i-1} & a_{2i} & a_{2,i+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{n,i-1} & a_{ni} & a_{n,i+1} & \cdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdots & a_{1,i-1} & a_{1i}^* & a_{1,i+1} & \cdots \\ \cdots & a_{2,i-1} & a_{2i}^* & a_{2,i+1} & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots & a_{n,i-1} & a_{ni}^* & a_{n,i+1} & \cdots \end{vmatrix}$$

## Linkkejä

[2- ja 3-riviset determinantit](#)

[Determinantin laskeminen alideterminanttimenetelmällä](#)

[Determinantin laskeminen Gaussin menetelmän avulla](#)

*Ossi Mauno* 28.10.2004