Gaussin ja Gaussin–Jordanin menetelmät

Gaussin (eliminointi)menetelmä on keino ratkaista lineaarisia yhtälöryhmiä. Menetelmässä yhtälöryhmästä muodostetaan alla olevan kaltainen "täydennetty matriisi", jota muokataan siten, että lähinnä vasenta alanurkkaa olevat alkiot pyritään muuntamaan nolliksi. Ensin ensimmäisen sarakkeen muut kuin ensimmäinen alkio saatetaan nolliksi lisäämällä ensimmäinen rivi sopivalla vakiolla kerrottuna muihin riveihin. Menetelmää jatketaan siten, että toisessa sarakkeessa pyritään saamaan kaikki muut paitsi kahden ensimmäisen rivin alkiot nolliksi. Joskus on tarpeen vaihtaa rivien järjestystä.

Yhtälöryhmä ja sitä vastaava matriisiyhtälö

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & + & 9x_4 & = & 6 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 5x_4 & = & 8 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 4 \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 1 & 3 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ratkaistaan Gaussin menetelmällä seuraavasti:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right]$$

Ensimmäinen rivi lisätään vakiolla kerrottuna muihin riveihin, jotta 1. sarakkeen alkiot saataisiin nolliksi.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Koska toisen rivin toinen alkio on nolla, täytyy rivien järjestystä vaihtaa.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Muutetaan lävistäjän alapuolella olevat toisen sarakkeen alkiot nolliksi lisäämällä toinen rivi vakiolla kerrottuna kolmanteen riviin.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Tämä vastaa yhtälöryhmää

$$\left\{\begin{array}{rrrrcl} 1x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = & 3 \\ & 1x_2 & & +1x_4 & = & 1 \\ & & 2x_3 & & = & 4 \\ & & & 1x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Tästä yhtälöryhmästä tuntemattomat on helppo ratkaista sijoitusten avulla.

$$\left\{\begin{array}{l} x_4 = 0 \\ x_3 = 4/2 = 2 \\ x_2 = -x_4 + 1 = -0 + 1 = 1 \\ x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 4x_4 + 3 = -2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 - 4 \cdot 0 + 3 = -5 \end{array}\right.$$

Gaussin menetelmässä kerroinmatriisin ei tarvitse olla neliömatriisi eli tuntemattomia voi olla enemmän tai vähemmän kuin yhtälöitä. Tällöin Gaussin menetelmällä voidaan päätyä esimerkiksi seuraavanlaiseen muotoon.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 6 & 8 & 1 & 41 \\ 0 & 9 & 6 & 1 & 31 \\ 0 & 0 & 4 & 9 & 7 \end{array}\right]$$

Koska muuttujia on yksi enemmän kuin yhtälöitä eivätkä yhtälöt ole keskenään ristiriidassa, voidaan yksi muuttujista valita vapaasti, esimerkiksi $x_4 = \alpha$. Tällöin sijoitusten jälkeen saadaan ratkaisuksi:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{40}{3} + \frac{26}{3}\alpha \\ x_2 = \frac{41}{18} + \frac{25}{18}\alpha \\ x_3 = \frac{7}{4} + \frac{9}{4}\alpha \\ x_4 = \alpha \end{cases}, \qquad \text{missä } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Siis ratkaisuja on olemassa äärettömästi.

Gaussin–Jordanin menetelmä

Täydennetyn matriisin muokkausta olisi vielä voinut jatkaa, jolloin matriisista olisi voinut suoraan lukea tuntemattomien arvot.

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \leftarrow + \\ | : 2 \\ -1 \quad -4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow + \\ \\ -3 \\ \\ \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow + \\ -2 \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} & \end{array}$$

Tätä menetelmää kutsutaan Gaussin–Jordanin (eliminointi)menetelmäksi.

Linkkejä

Käänteismatriisin laskeminen
Determinantin laskeminen Gaussin menetelmällä

Ossi Mauno 28.10.2004