Käänteismatriisin laskeminen

Matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ käänteismatriisi $B = \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}$ saadaan ratkaisemalla yhtälö

$$AB = I$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Toisin sanoen on ratkaistava yhtälöt

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nämä yhtälöt voi ratkaista myös yhtä aikaa samaan tapaan kuin Gaussin–Jordanin menetelmässä:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mid \cdot (-1) \\ \mid : (-2) \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Matriisin A käänteismatriisi B on siis

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -3 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Linkkejä

Käänteismatriisi
Gaussin ja Gaussin ja Jordanin menetelmät

Ossi Mauno 28.10.2004