Kanta

Vektorit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ muodostavat vektoriavaruuden V kannan, jos

i) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ ovat lineaarisesti riippumattomia ja

ii) jokainen V:n vektori voidaan lausua vektoreiden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ lineaariyhdistelynä (lineaarikombinaationa).

Jälkimmäinen ehto voidaan ilmaista myös lyhyemmin merkinnällä $\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n) = V$ tai sanomalla, että vektorit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ virittävät V:n.

Vektoriavaruuden kanta ei ole yksikäsitteinen. Ensinäkin minkä tahansa kannan vektorin voi korvata uudella vektorilla, joka on saatu kertomalla vanha kantavektori nollasta eroavalla skalaarilla. Usein kantavektorit ilmaistaan siten, että niiden pituus on 1. Tällöin puhutaan normeeratusta kannasta.

Lisäksi kantavektoreiksi kelpaa mikä tahansa lineaarisesti riippumattomien vektorien joukko, joka virittää koko vektoriavaruuden, joten eri kantojen vektorit voivat olla erisuuntaisia.

Esimerkiksi eräs $\mathbb{R}^3$:n kanta on

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \quad \mathbf{e}_2 = (0,1,0) \quad \text{ja} \quad \mathbf{e}_3 = (0,0,1)$$

ja toinen sen kanta on

$$\mathbf{d}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \quad \mathbf{d}_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \quad \text{ja} \quad \mathbf{d}_3 = (0,0,1),$$

sillä mikä tahansa $\mathbb{R}^3$:n vektori voidaan lausua vektoreiden $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ja $\mathbf{e}_3$ ja toisaalta vektorien $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$ ja $\mathbf{d}_3$ lineaariyhdistelynä.

Kantavektorien kertoimia tällaisessa lineaariyhdistelyssä kutsutaan koordinaateiksi. Esimerkiksi vektorin $\mathbf{x}=\sqrt{2}\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ koordinaatit kannassa $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ovat 0, $\sqrt{2}$ ja 2 sekä kannassa $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ 1, 1 ja 2, sillä $\mathbf{x} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 + 2\mathbf{d}_3$.

Kantavektoreiden $\mathbf{d}_1$ ja $\mathbf{d}_3$ virittämä $\mathbb{R}^3$:n vektorialiavaruus on taso. Vektorit $\mathbf{d}_1$ ja $\mathbf{d}_3$ muodostavat tämän tason kannan. Eräs toinen saman tason kanta on $\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$, missä

$$\mathbf{c}_1 = (1,1,1) \quad \text{ja} \quad \mathbf{c}_2 = (1,1,2).$$

Luonnollinen kanta

Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ luonnollinen kanta on

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,\ldots,0) \\ e_2 &= (0,1,0,\ldots,0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0,0,0,\ldots,1) \end{aligned}$$

Luonnollisen kannasta tekee se, että vektorin $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ alkiot x_1, x_2, $\ldots$, x_n ovat samat kuin luonnollisen kannan koordinaatit.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ &= (x_1, 0, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0,0,0,\ldots,x_n) \\ &= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \end{aligned}$$

Linkkejä

Vektoriavaruus
Dimensio
Lineaarinen riippumattomuus
Lineaariyhdistely ja aliavaruuden virittäminen

Ossi Mauno 28.10.2004