Matriisien kertolasku eli matriisitulo

Matriisien A ja B tulo AB on määritelty vain, jos A:n sarakkeiden lukumäärä on sama kuin B:n rivien lukumäärä.

Matriisien $\underset{m\times n}{A} = [a_{ij}]$ ja $\underset{n\times p}{B} = [b_{ij}]$ tulo on $m \times p$-matriisi $AB = C = [c_{ij}]$, missä

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \\ &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \end{aligned}$$

kaikilla $1 \le i \le m$ ja $1 \le j \le p$.

Esimerkiksi

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0,5 & -0,5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot 0,5 & 1\cdot 0+2\cdot(-0,5) & 1\cdot(-2)+2\cdot 2 \\ -3\cdot(-1)+(-4)\cdot 0,5 & -3\cdot 0+(-4)\cdot(-0,5) & -3\cdot(-2)+(-4)\cdot 2 \\ 3\cdot(-1)+4\cdot 0,5 & 3\cdot 0+4\cdot(-0,5) & 3\cdot(-2)+4\cdot 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matriisitulossa kertomerkki/piste jätetään yleensä kirjoittamatta.

Matriisitulo ei ole vaihdannainen eli matriisien järjestystä ei voi vaihtaa.

Esimerkiksi, jos $\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{B} = \underset{m\times p}{C}$, niin tulo BA on määritelty vain, jos $p = m$ eli A ja B ovat neliömatriiseja. Neliömatriisienkaan matriisitulon järjestystä ei saa vaihtaa, sillä esimerkiksi

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ mutta}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Yllä olevasta esimerkistä käy myös ilmi, että tulon nollasääntö ei päde matriiseille: vaikka tulo olisi nollamatriisi, ei kummankaan tulon tekijöistä tarvitse olla nollamatriisi. Mieti päteekö tämä myös toisinpäin.

Matriiseille A, B ja C pätevät seuraavat säännöt:

- $(AB)C = A(BC)$
- $A(B+C) = AB + AC$
- $r(AB) = (rA)B = A(rB), \quad r \in \mathbb{R}$

Matriisitulon transpoosille pätee:

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$$

Linkkejä

Matriisi
Matriisien yhteenlasku ja skalaarilla kertominen

Ossi Mauno 28.10.2004