Kierto tasossa

Tason pistettä P vastaava vektori on $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$, missä r on pisteen etäisyys origosta ja ϕ positiivisen x-akselin ja janan, joka yhdistää pisteen ja origon, välinen kulma (mitattuna x-akselista vastapäivään).

Jos pistettä kierretään kulman ω verran origon ympäri, on pisteen uusi paikka (kiertokuvauksen kuvapiste)

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} r\cos(\phi+\omega) \\ r\sin(\phi+\omega) \end{bmatrix}.$$

Tämä saadaan trigonometrisia kaavoja käyttämällä muotoon

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} r\cos\phi\cos\omega - r\sin\phi\sin\omega \\ r\sin\phi\cos\omega + r\cos\phi\sin\omega \end{bmatrix}$$

Tämän voi ilmaista myös 2×2-matriisin A ja alkuperäistä pistettä vastaavan vektorin $\mathbf{x}$ avulla

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r\cos\phi \\ r\sin\phi \end{bmatrix}$$

Esimerkiksi xy-tason pistettä (1,1) vastaavan vektorin $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ kierto 60 astetta positiiviseen kiertosuuntaan (vastapäivään):

$$\begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

Siis jos pistettä $(1,1)$ kierretään 60 astetta vastapäivään origon ympäri, päädytään pisteeseen $(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2})$. Kiertomatriisi vastakkaiseen suuntaan 60 asteen verran saadaan matriisin A käänteismatriisista A^{-1}. Suorittamalla kierrot peräkkäin päädytään alkuperäiseen pisteeseen.

$$A^{-1}A\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Linkkejä

Käänteismatriisi

Ossi Mauno 28.10.2004