

Ominaisarvo ja ominaisvektori

Niitä luvun $\lambda \in \mathbb{C}$ ja vektorin $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ pareja, jotka toteuttavat yhtälön

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

missä A on neliömatriisi, kutsutaan matriisin A ominaisarvoiksi ja ominaisvektoreiksi.

Esimerkiksi matriisin $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ominaisarvot ja -vektorit ratkaistaan lähtemällä määritelmästä

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Yhtälö voidaan kirjoittaa komponenteittain muodossa

$$1x_1 + 1x_2 = \lambda x_1 \\ 0x_1 + 2x_2 = \lambda x_2$$

Tämä voidaan muokata muotoon

$$(1 - \lambda)x_1 + 1x_2 = 0 \\ 0x_1 + (2 - \lambda)x_2 = 0$$

ja kirjoittaa edelleen muodossa

$$\begin{bmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

eli

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Yhtälöllä on ei-triviaali ratkaisu (eli $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) vain, jos kerroinmatriisin $(A - \lambda I)$ determinantti on 0. On siis oltava

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 1 \cdot 0 = 0,$$

mistä saadaan ratkaisut $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = 2$. Vastaavat ominaisvektorit saadaan ratkaisemalla yhtälöt

$$A\mathbf{x}_1 = \lambda_1 x_1 \quad \text{ja} \\ A\mathbf{x}_2 = \lambda_2 x_2$$

jotka saadaan samoin kuin edellä muotoon

$$(A\mathbf{x}_1 - \lambda_1 I) = \mathbf{0} \quad \text{ja} \\ (A\mathbf{x}_2 - \lambda_2 I) = \mathbf{0}.$$

Yhtälöt ovat matriisimuodossa

$$\begin{vmatrix} 1 - 1 & 1 \\ 0 & 2 - 1 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \\ \begin{vmatrix} 1 - 2 & 1 \\ 0 & 2 - 2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Näistä yhtälöistä ominaisvektoreiksi saadaan: $\mathbf{x}_1 = [1 \ 0]^T$ ja $\mathbf{x}_2 = [1/\sqrt{2} \ 1/\sqrt{2}]^T$.

Matriisin A ominaisarvot saadaan siis ratkaisemalla yhtälö $\det(A - \lambda I) = 0$ eli ratkaisemalla n :n asteen polynomin nollakohdat. Kyseistä polynomia kutsutaan karakteristiseksi polynomiksi. Kaikki, myös kompleksiset, karakteristisen polynomin nollakohdat ovat ominaisarvoja. Jos karakterisella polynomilla on m -kertainen juuri, sanotaan vastaavan ominaisarvon algebrallisen kertaluvun olevan m .

Neliömatriisilla ($n \times n$) on aina vähintään yksi ja korkeintaan n eri ominaisarvoa. Ominaisarvot voivat olla kompleksilukuja, vaikka matriisin alkiot olisivat reaalisia.

Kuhunkin ominaisarvoon liittyy ääretön määrä ominaisvektoreita. Jos \mathbf{x} on ominaisvektori, saadaan muut samaan ominaisarvoon liittyvät vektorit selville kaavalla $\alpha \mathbf{x}$, missä $\alpha \neq 0$ on skalaari.

Linkkejä

[Matriisien kertolasku eli matriisitulo](#)

[2- ja 3-riviset determinantit](#)

[Similaarisuus](#)

Ossi Mauno 28.10.2004