Ristitulo

Ristitulo eli vektoritulo määritellään tässä vain vektoreille, joilla on kolme alkiota eli vektoreille, jotka kuuluvat kolmiuloitteiseen vektoriavaruuteen.

Ristituloa merkitään ristillä $\times$. Vektorien $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ ristitulo on vektori, joka lasketaan

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \sin(\mathbf{a},\mathbf{b})\mathbf{e},$$

missä $\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})$ on vektorien $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ välisen kulman sini ja $\mathbf{e}$ vektoreita $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ vastaan kohtisuorassa oleva yksikkövektori. Vektorin $\mathbf{e}$ suunta on sellainen, että kolmikko $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{e}$ on positiivisesti suunnistettu.

Ristitulolla on täten seuraavat kolme ominaisuutta (joilla voisi korvata yllä olevan kaavan ristitulon määritelmänä).

1) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \sin(\mathbf{a},\mathbf{b})$ (pituus)
2) $\mathbf{a} \perp \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ja $\mathbf{b} \perp \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (kohtisuoruus)
3) kolmikko $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ on positiivisesti suunnistettu

Määritelmästä näkee, että mikäli vektorit $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ ovat yhdensuuntaiset, on niiden ristitulo nolla.

Ristitulolle pätevät seuraavat laskulait:

i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (antikommutointi)
ii) $k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (k\mathbf{b}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times (k\mathbf{a})$, $k \in \mathbb{R}$
iii) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
iv) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

Toisiaan vastaan kohtisuorien yksikkövektorien $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$, jotka muodostavat oikeakätisen systeemin, ristitulot ovat:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{array}$$

Vektorien

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \quad \text{ja}$$
$$\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$$

ristitulo on

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_j b_k - a_k b_j)\mathbf{i} + (a_k b_x - a_x b_k)\mathbf{j} + (a_x b_j - a_j b_x)\mathbf{k}$$

Tämä voidaan kirjoittaa myös helpommin muistettavassa muodossa ”determinantin” avulla, jolloin se lasketaan kuten kolmirivinen determinantti eli

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_j & a_k \\ b_x & b_j & b_k \end{vmatrix} = (a_j b_k - a_k b_j)\mathbf{i} + (a_k b_x - a_x b_k)\mathbf{j} + (a_x b_j - a_j b_x)\mathbf{k},$$

missä ”determinantti” on laskettu kehittämällä se ensimmäisen vaakarivin mukaan.

Linkkejä

Sisätulo (pistetulo, skalaaritulo)
Determinantin laskeminen alideterminanttimenetelmällä
Piste- ja ristitulon laskeminen MATLABilla

Ossi Mauno 28.10.2004