Vektoriavaruus

Joukko V on vektoriavaruus, mikäli sen kaikille alkioille on määritelty yksikäsitteiset laskutoimitukset summa ja skalaarilla kertominen siten, että niiden lopputulos on myöskin joukon V alkio. Toisin sanoen kaikilla $\mathbf{x}$ ja $\mathbf{y} \in V$ sekä $\alpha \in \mathbb{K}$, missä $\mathbb{K}$ on kerroinkunta, esimerkiksi $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$, pätee

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} \in V \quad \text{ja}$$
$$\alpha\mathbf{x} \in V.$$

Tällöin joukon V sanotaan olevan suljettu yhteenlaskun ja skalaarilla kertomisen suhteen.

Lisäksi, jotta V olisi vektoriavaruus, tulee sen täyttää seuraavat ehdot kaikilla $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ ja $\mathbf{z} \in V$ sekä α ja $\beta \in \mathbb{K}$.

i) $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{y}+\mathbf{x}$ (yhteenlaskun vaihdannaisuus)

ii) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z} = \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ (yhteenlaskun liitännäisyys)

iii) On olemassa $\mathbf{0}$ siten, että $\mathbf{x}+\mathbf{0} = \mathbf{x}$ (nolla-alkion olemassaolo)

iv) Jokaiselle $\mathbf{x}$ on olemassa $-\mathbf{x}$ siten, että $\mathbf{x}+(-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (vasta-alkion olemassaolo)

v) $(\alpha+\beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$ (osittelulaki)

vi) $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$ (osittelulaki)

vii) $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$ (tulon liitäntälaki)

viii) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ (ykkösellä kertominen)

Kolmannesta ehdosta seuraa, että vektoriavaruudessa on ainakin alkio $\mathbf{0}$. Mitään muuta vektoriavaruudessa ei tarvitsekaan olla, joten suppein vektoriavaruus koostuu vain yhdestä alkiosta. Sovellusten kannalta kyseinen vektoriavaruus on kuitenkin melko hyödytön.

Lisäksi ehdoista seuraa, että nollavektori $\mathbf{0}$ sekä $\mathbf{x}$:n vastavektori $-\mathbf{x}$ ovat yksikäsitteisiä.

Esimerkkejä vektoriavaruuksista ovat korkeintaan astetta n olevien polynomien joukko kerroinkuntanaan $\mathbb{R}$ tai joukko $\{0,1\}$, missä yhteenlasku on määritelty siten, että $1+1=0$.

Linkkejä

Vektorialiavaruus
Kanta
Dimensio

Ossi Mauno 29.10.2004