Simo K. Kivelä

Kompleksiluvut

30.8.2009
Versio 1.01, 23.10.2012

1 Miksi kompleksilukuja?

Lukualueen vaiheittaisen laajentamisen luonnollisista luvuista kokonaislukujen ja rationaalilukujen kautta reaalilukuihin ($\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$) voidaan katsoa syntyvän tarpeesta löytää ratkaisu yhä uusille yhtälötyypeille: $x+2=0$ ei ratkea luonnollisten lukujen joukossa, mutta kylläkin kokonaislukujen joukossa; $2x+3=0$ ei ratkea kokonaislukujen, mutta kyllä rationaalilukujen joukossa; yhtälöllä $x^2=2$ ei ole rationaalista ratkaisua, mutta reaalilukujoukkoon kuuluva ratkaisu löytyy.

Samaa ajattelua voidaan yrittää jatkaa: Yhtälö $x^2+1=0$ ei ratkea reaalilukujoukossa, mutta voitaisiinko lukujoukkoa laajentaa siten, että sille kuitenkin löytyisi ratkaisu?

Suoraviivainen mahdollisuus on päättää ottaa käyttöön 'luku' i, jolla on ominaisuus $\mathrm{i}^2=-1$, ja sopia lisäksi, että sillä lasketaan reaalilukujen laskusääntöjä noudattaen. Tällöin on $(-\mathrm{i})^2=\mathrm{i}^2=-1$, ja yhtälölle $x^2+1=0$ on saatu kaksi ratkaisua, i ja $-\mathrm{i}$. Jotenkin luontevaa on tällöin myös kirjoittaa $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$.

Avoimeksi kuitenkin tällöin jää, mikä i oikeastaan on ja voidaanko ristiriitoihin joutumatta sopia, että sillä lasketaan reaalilukujen tapaan. Itse asiassa ongelmia syntyy, kuten seuraava lasku osoittaa:

$$-1=\mathrm{i}^2=(+\sqrt{-1})(+\sqrt{-1})=+\sqrt{(-1)(-1)}=+\sqrt{+1}=+1.$$

Tarpeeseen pohtia negatiivisten lukujen neliöjuuria on johduttu muillakin tavoilla. Toisen asteen yhtälö osattiin ratkaista viimeistään 1400-luvulla ja tiedettiin, että ratkaisuja ei ole, jos ratkaisussa johdutaan negatiivisten lukujen neliöjuuriin. Kolmannen asteen yhtälön ratkaiseminen nousi kiinnostuksen kohteeksi 1500-luvulla. Seuraava esimerkki on *Geronimo Cardanolta*, tosin meidän aikamme merkintätapoja käyttäen.

Tarkasteltavana on yhtälö $x^3=15x+4$. Yhtälön ratkaisemiseksi sijoitetaan $x=u+v$, missä apumuuttujat u ja v valitaan siten, että $uv=5$. Tällöin yhtälö saa muodon

$$u^3+3u^2v+3uv^2+v^3=15u+15v+4 \quad \text{eli} \quad u^3+v^3=4,$$

koska $3u^2v+3uv^2=3uv(u+v)=15u+15v$. Sijoittamalla $v=5/u$, saadaan edelleen

$$u^3+\frac{125}{u^3}=4 \quad \text{eli} \quad u^6-4u^3+125=0.$$

Kun tuntemattomaksi otetaan $z=u^3$, tämä on toisen asteen yhtälö $z^2-4z+125=0$, jonka ratkaisu on $z=2\pm\sqrt{-121}$. Tällöin

$$u^3=2\pm\sqrt{-121} \quad \text{ja} \quad v^3=\frac{125}{u^3}=\frac{125}{2\pm\sqrt{-121}}=2\mp\sqrt{-121},$$

jolloin alkuperäisen yhtälön ratkaisu voidaan kirjoittaa

$$x=u+v=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}.$$

Tulos sisältää neliöjuuria negatiivisista luvuista, ja tämän voisi ajatella tarkoittavan, että yhtälöllä ei ole ratkaisuja. Tällä kuitenkin *on* kolme ratkaisua, 4, $-2+\sqrt{3}$ ja $-2-\sqrt{3}$, kuten sijoittamalla voidaan todeta. Olisiko siis $\sqrt{-121}$ jotenkin ymmärrettävissä siten, että saatu lauseke sievenisi ja antaisi jonkin edellä mainituista kolmesta ratkaisusta?

Luvun i ja yleisemmin muotoa $x + \mathrm{i}y$ olevien *kompleksilukujen* selkeä määrittely on 1800-luvun alkupuolelta. Sitä pidetään usein *Carl Friedrich Gaussin* työnä, mutta idean oli jo hieman aiemmin esittänyt norjalainen *Caspar Wessel*.

Sittemmin kompleksiluvut ovat osoittautuneet merkityksellisiksi monissa muissakin yhteyksissä kuin polynomiyhtälöiden ratkaisemisessa ja polynomien ominaisuuksien analysoinnissa. Niitä tarvitaan sekä monilla matematiikan alueilla että sovellettaessa matematiikkaa muissa tieteissä, esimerkiksi fysiikassa ja sähkötekniikassa.

2 Kompleksilukujen määrittely

Kompleksilukujen määrittelyssä lähtökohdaksi otetaan xy-taso, ts. joukko

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{\, (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \,\}.$$

Tätä aletaan kutsua *kompleksitasoksi* tai *kompleksilukujoukoksi* ja sille käytetään symbolia $\mathbb{C}$. Joukon alkioita merkitään — ainakin aluksi — $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ jne. ja niitä kutsutaan *kompleksiluvuiksi*.

Joukon $\mathbb{C}$ alkioille määritellään *yhteenlasku* ja *kertolasku* kaavoilla

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2), \\ z_1 z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

Esimerkiksi kompleksilukujen $z_1 = (1, 2)$ ja $z_2 = (3, 4)$ summa ja tulo ovat siis

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (1 + 3,\ 2 + 4) = (4, 6), \\ z_1 z_2 &= (1 \cdot 3 - 2 \cdot 4,\ 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3) = (-5, 10). \end{aligned}$$

Osoittautuu, että kompleksiluvuilla, so. muotoa $z = (x, y)$ olevilla symboleilla voidaan tällöin laskea samoilla säännöillä kuin reaaliluvuilla. Erityisesti on olemassa kompleksiluvut *nolla* $(0, 0)$ ja *ykkönen* $(1, 0)$, jotka käyttäytyvät kuten reaaliluvut 0 ja 1: nollan lisääminen toiseen kompleksilukuun ei muuta sitä, toisen luvun kertominen ykkösellä ei muuta sitä.

Jokaisella kompleksiluvulla $z = (x, y)$ on *vastaluku* $-z = (-x, -y)$. Kun luku ja vastaluku lasketaan yhteen, saadaan nolla $(0, 0)$.

Jokaisella kompleksiluvulla $z = (x, y)$, joka poikkeaa nollasta, ts. ainakin toinen luvuista x ja y on $\neq 0$, on myös *käänteisluku*:

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right).$$

Luvun ja käänteisluvun tulo on ykkönen $(1, 0)$, kuten laskemalla voidaan tarkistaa.

Erikoisasemassa osoittautuu olevan kompleksiluku $(0, 1)$, jolle annetaan nimeksi *imaginaariyksikkö* ja jolle käytetään symbolia i[1]. Tämän tulo itsensä kanssa, ts. toinen potenssi on kertolaskun määritelmän perusteella $(-1, 0)$.

Reaalilukujoukko $\mathbb{R}$ upotetaan kompleksitasoon $\mathbb{C}$ samastamalla $x \in \mathbb{R}$ ja $(x, 0) \in \mathbb{C}$. Tällöin aletaan myös merkitä $x = (x, 0)$. Kompleksitason nollalle ja ykköselle saadaan tällöin luonnolliset merkinnät: $0 = (0, 0)$ ja $1 = (1, 0)$.

Samastus johtaa merkintään, jota yleensä käytetään kompleksilukuja käsiteltäessä:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + \mathrm{i}y.$$

Kompleksiluvun $z = x + \mathrm{i}y$ *reaaliosa* on $\operatorname{Re} z = x$ ja *imaginaariosa* $\operatorname{Im} z = y$.

Reaalilukujen samastaminen kompleksilukujen osajoukoksi ei ole järkevää, elleivät kummassakin joukossa toisistaan riippumatta määritellyt laskutoimitukset ole myös samastettavissa. Tämä tarkoittaa, että laskutoimituksen tuloksen täytyy olla riippumaton siitä, kumpi suoritetaan ensin, samastus vai laskutoimitus. Näin todella on, mikä ilmenee seuraavista *kommutoivista kaavioista*: niissä päästään vasemmasta ylänurkasta oikeaan alanurkkaan kumpaa tahansa tietä.

$$\begin{tikzcd}
x_1, x_2 \arrow[r, "\text{yhteenlasku } \mathbb{R}\text{:ssä}"] \arrow[d, "\text{samastus}"'] & x_1 + x_2 \arrow[d, "\text{samastus}"] \\
(x_1, 0), (x_2, 0) \arrow[r, "\text{yhteenlasku } \mathbb{C}\text{:ssä}"] & (x_1 + x_2, 0)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
x_1, x_2 \arrow[r, "\text{kertolasku } \mathbb{R}\text{:ssä}"] \arrow[d, "\text{samastus}"'] & x_1 x_2 \arrow[d, "\text{samastus}"] \\
(x_1, 0), (x_2, 0) \arrow[r, "\text{kertolasku } \mathbb{C}\text{:ssä}"] & (x_1 x_2, 0)
\end{tikzcd}$$

Selaimessa toimiva demonstraatio [1] esittää kahden kompleksiluvun summaa ja tuloa. Lukuja voidaan siirrellä hiirellä kompleksitasossa, jolloin niiden summa ja tulo liikkuvat vastaavasti.

3 Kompleksilukujen kunta

Yhteen- ja kertolaskulla varustettu kompleksilukujen joukko $\mathbb{C}$ on algebralliselta struktuuriltaan *kunta* (kuten reaaliluvutkin). Tämän osoittamiseksi on todettava

[1] Joissakin yhteyksissä, mm. usein sähkötekniikassa käytetään symbolia j.

seuraavien *kunta-aksioomien* voimassaolo:

$$
\begin{aligned}
& z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}; && (1)\\
& z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}; && (2)\\
& \exists\, 0 \in \mathbb{C} \quad \text{siten, että} \quad z + 0 = z \quad \forall z \in \mathbb{C}; && (3)\\
& \qquad \text{kyseessä on kompleksiluku } \textit{nolla } 0 = (0, 0);\\
& \forall z \in \mathbb{C} \quad \exists z' \in \mathbb{C} \text{ siten, että } z + z' = 0; && (4)\\
& \qquad z' \text{ on luvun } z \textit{ vastaluku}\text{: jos } z = (x, y), \text{ niin } z' = (-x, -y);\\
& \qquad \text{merkitään } z' = -z;\\
& z_1 z_2 = z_2 z_1 \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}; && (5)\\
& z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3 \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}; && (6)\\
& \exists\, 1 \in \mathbb{C} \text{ siten, että } z \cdot 1 = z \quad \forall z \in \mathbb{C}; \quad 1 \neq 0; && (7)\\
& \qquad \text{kyseessä on kompleksiluku } \textit{ykkönen } 1 = (1, 0);\\
& \forall (z \in \mathbb{C}, z \neq 0) \quad \exists z' \in \mathbb{C} \text{ siten, että } z z' = 1; && (8)\\
& \qquad \text{kyseessä on } \textit{käänteisluku } z' = z^{-1} = (\frac{x}{x^2 + y^2}, \ -\frac{y}{x^2 + y^2});\\
& z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}. && (9)
\end{aligned}
$$

Näiden voimassaolon osoittaminen on luonteeltaan mekaaninen, paikoin ehkä hieman pitkä lasku, jossa sovelletaan toistuvasti yhteen- ja kertolaskun määritelmiä.

Kompleksitaso laskutoimituksineen voidaan määritellä edellä kuvatulla tavalla riittävän monipuolisessa symbolisessa laskentaohjelmassa, jolloin myös kunta-aksioomien voimassaolo voidaan tarkistaa ohjelmalla. Määrittely on esitetty Mathematica-dokumentissa, joka on saatavana sekä pdf-muotoisena [2] että Mathematicalla tai CDF Playerilla avattavana Mathematican muistikirjana [3].

Määrittelyn tuloksena on saatu kompleksilukujoukko $\mathbb{C}$, jonka luvut ovat muotoa $x + \mathrm{i}y$. Näiden peruslaskutoimitukset, ts. yhteen-, vähennys- (= vastaluvun lisäys), kerto- ja jakolasku (= käänteisluvulla kertominen) noudattavat kuntaominaisuuksien seurauksena samoja sääntöjä kuin reaalilukujoukossa. Lisäksi lausekkeita voidaan sieventää yhtälön $\mathrm{i}^2 = -1$ avulla. Esimerkiksi neliöjuurten laskulakeihin ei samankaltaisuus reaalilukujen kanssa kuitenkaan rajoituksetta ulotu.

Tämän jälkeen on mahdollista myös nähdä syy aluksi ehkä hieman erikoiselta näyttäneeseen kertolaskun määritelmään: Sen tavoitteena on ollut päästä samoihin laskusääntöihin kuin reaaliluvuilla. Onhan nimittäin

$$
\begin{aligned}
z_1 z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) &= x_1 x_2 + \mathrm{i}^2 y_1 y_2 + \mathrm{i}x_1 y_2 + \mathrm{i}x_2 y_1\\
&= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1).
\end{aligned}
$$

4 Liittoluku ja itseisarvo

Kompleksiluvun $z = x + \mathrm{i}y$ *liittoluvuksi* eli *konjugaatiksi* kutsutaan lukua[2] $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$.

Kompleksiluvun $z = x + \mathrm{i}y$ *itseisarvo* eli *moduuli* on $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, ts. pisteen (x, y) etäisyys origosta.

Summan liittoluku voidaan muodostaa termeittäin, tulon vastaavasti tekijöittäin:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \qquad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2.$$

Nämä voidaan nähdä suoralla laskulla. Ilmeistä on myös

$$\bar{\bar{z}} = z.$$

Itseisarvolla on suoraan määritelmästä nähtävät ominaisuudet

$$\begin{aligned}
&|\bar{z}| = |z|, \\
&|z|^2 = z\bar{z} \quad \text{eli} \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}} \quad \text{ja} \\
&\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.
\end{aligned}$$

Huomattakoon, että yleensä on $|z|^2 \neq z^2$.

Itseisarvon suhde laskutoimituksiin on samanlainen kuin reaaliluvuilla:

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \qquad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Kertolaskun tapauksessa kyseessä on siis yhtälö, yhteenlaskun tapauksessa epäyhtälö. Jälkimmäinen on oikeastaan osa pidempää epäyhtälöketjua, ns. *kolmioepäyhtälöä*:

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Esitettyjen ominaisuuksien todistukset ovat varsin suoraviivaisia laskuja, jotka perustuvat joko kompleksilukujen laskusääntöihin tai lukujen esittämiseen reaali- ja imaginaariosan avulla, so. muodossa $z = x + \mathrm{i}y$.

Kolmioepäyhtälön tapauksessa työtä on hieman enemmän:

Koska $z + \bar{z} = 2x = 2\,\mathrm{Re}\,z$ ja $|\mathrm{Re}\,z| = |x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ kaikilla kompleksiluvuilla z, on

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 \\
&= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 \\
&\begin{cases} \leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2, \\ \geq |z_1|^2 - 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| - |z_2|)^2, \end{cases}
\end{aligned}$$

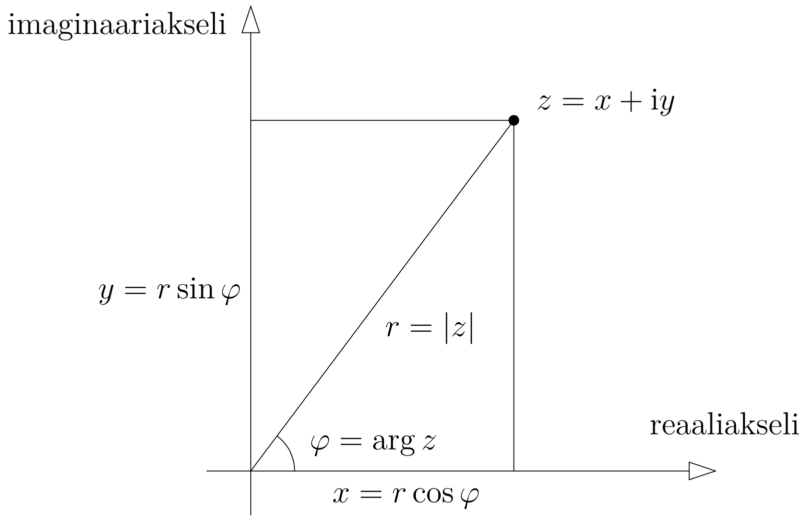
mistä seuraakin

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{ja} \quad |z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||\,.$$

[2] Merkinnän $\bar{z}$ sijasta voidaan käyttää muitakin mwerkintätapoja, esimerkiksi z^*.

5 Kompleksiluvun napakoordinaattiesitys

Kompleksiluku $z = x + \mathrm{i}y$ voidaan ajatella xy-tason pisteeksi (x, y). Luvun *itseisarvo* eli *moduuli* $r = |z| = \operatorname{mod} z$ on pisteen etäisyys origosta.



Origosta pisteeseen osoittavan janan suuntakulma x-akseliin nähden on luvun *napakulma*. Tämä on positiivinen tai negatiivinen sen mukaan, kierretäänkö positiiviseen tai negatiiviseen kiertosuuntaan. Napakulma ei ole yksikäsitteinen, vaan sen tiettyyn arvoon voidaan lisätä mielivaltainen (positiivinen tai negatiivinen) määrä täysiä kierroksia.

Napakulman arvoista yksi on aina välillä $]-\pi, \pi]$. Tätä kutsutaan kompleksiluvun *argumentiksi*[3] ja merkitään $\arg z$.

Luvun z jonkin napakulman φ ero argumenttiin $\arg z$ nähden on luvun 2π monikerta (positiivinen, negatiivinen tai nolla). Tällöin merkitään

$$\varphi = \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

tai

$$\varphi \equiv \arg z \pmod{2\pi}.$$

(Luetaan 'modulo 2π'.)

Moduuli $r = \operatorname{mod} z$ ja napakulma $\varphi \equiv \arg z \pmod{2\pi}$ ovat kompleksiluvun *napakoordinaatit*. Näiden avulla saadaan kompleksiluvulle $z = x + \mathrm{i}y$ *napakoordinaattiesitys*[4]

$$z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

[3]Toisinaan argumentilla tarkoitetaan mitä tahansa napakulmaa. Tällöin välillä $]-\pi, \pi]$ olevaa arvoa kutsutaan argumentin *päähaaraksi*.

[4]Napakoordinaattiesitystä merkitään myös lyhyemmin $z = re^{\mathrm{i}\varphi}$. Tämän mielekkyys pohjautuu kompleksisen eksponenttifunktion määrittelyyn.

Suorakulmaisten ja napakoordinaattien väliset yhteydet ovat

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \qquad \text{ja} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}.$$

Viimeinen yhtälö muodossa $\varphi = \arctan(y/x)$ antaa oikean argumentin arvon vain, jos $x > 0$. Jos $x < 0$, on tätä arvoa korjattava termillä π (vähennettävä tai lisättävä), jotta päästään välille $]-\pi, -\pi/2[$ tai $]\pi/2, \pi]$.

Kahden kompleksiluvun tulo ja kompleksiluvun käänteisarvo voidaan laskea napakoordinaattiesityksen avulla seuraavasti. Olkoon

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2).$$

Lukujen itseisarvot ovat r_1 ja r_2, niiden argumentit φ_1 ja φ_2.

Lukujen tulo saadaan sinin ja kosinin yhteenlaskukaavojen avulla muotoon

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \mathrm{i}(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] \\ &= r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + \mathrm{i}\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \end{aligned}$$

Vastaavaan tapaan saadaan luvun $z \neq 0$, $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ käänteisluvulle

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z^2|} = \frac{r(\cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi)}{r^2} = \frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + \mathrm{i}\sin(-\varphi)].$$

Kummassakin tapauksessa tulokset ovat napakoordinaattimuotoja. Lukujen tulon itseisarvo on siis r_1r_2 ja napakulma $\varphi_1 + \varphi_2$. Tämä ei välttämättä ole argumentin alueella $]-\pi, \pi]$, vaikka φ_1 ja φ_2 olisivatkin. Käänteisluvun muodostuksessa itseisarvo muuttuu käänteisluvuksi ja napakulma vastaluvuksi. Siis:

$$\begin{aligned} &|z_1z_2| = |z_1||z_2|, \qquad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}, \\ &\arg(z_1z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}, \qquad \arg(\frac{1}{z}) = -\arg z. \end{aligned}$$

Jos $|z| = 1$, napakoordinaattimuoto on $z = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$. Edellä esitetystä seuraa tällöin $z^2 = (\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + \mathrm{i}\sin 2\varphi$ ja yleisemmin ns. *de Moivren* kaava

$$(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi.$$

Tässä n voi olla mikä tahansa kokonaisluku, mikä nähdään yhdistämällä edellä olevat tuloa ja käänteislukua koskevat tulokset.

Jos kompleksiluku $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ kerrotaan kompleksiluvulla $u = \cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi$, saadaan

$$uz = r[\cos(\varphi+\psi) + \mathrm{i}\sin(\varphi+\psi)],$$

ts. kompleksiluku, jonka itseisarvo on sama kuin luvun z $(= r)$, mutta jonka napakulma on kasvanut tekijän u napakulmalla.

Tuloa uz vastaava kompleksitason piste saadaan siis kiertämällä lukua z vastaavaa pistettä origon ympäri kulman ψ verran.

Kompleksiluvulla u kertominen määrittää siten tason kiertokuvauksen. Luku u on *kiertotekijä*. Sillä on ominaisuus $|u| = 1$. Ks. kompleksilukujen summaa ja tuloa käsittelevää demonstraatiota [1].

6 Kompleksilukujen juuret

Kompleksiluvun z n:s juuri $w = \sqrt[n]{z}$ tarkoittaa yhtälön $w^n = z$ ratkaisua. Tässä siis w on tuntematon ja z juurrettava.

Napakoordinaattiesitysten $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ ja $w = s(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$ avulla yhtälö saa muodon

$$s^n(\cos n\psi + \mathrm{i}\sin n\psi) = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi).$$

Tällöin tulee itseisarvojen olla samat, ts. $s^n = r$. Napakulmien erona on jokin luvun 2π monikerta, ts. $n\psi = \varphi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Näistä seuraa

$$s = \sqrt[n]{r} \quad \text{eli} \quad |w| = \sqrt[n]{|z|}, \quad \text{ja} \quad \psi = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \; k \in \mathbb{Z}.$$

Koska ψ on kompleksiluvun napakulma, riittää tarkastella niitä luvun k arvoja, jotka antavat napakulman yhden kierroksen alueelta. Helpointa on rajoittaa jaksotermi $2k\pi/n$ välille $[0, 2\pi[$, ts. tarkastella arvoja $k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$. Näitä vastaten juurelle $w = \sqrt[n]{z}$ saadaan n arvoa: $w_0,\ w_1,\ \ldots,\ w_{n-1}$.

Juuret voidaan kirjoittaa muotoon

$$w_k = w_0 u_n^k, \quad n = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

missä $w_0 = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{n})$ ja $u_n = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$ on kiertotekijä.

Juuret sijaitsevat tasavälisesti sellaisen origokeskisen ympyrän kehällä, jonka säde on $\sqrt[n]{r}$. Kertomalla edellinen juuri kiertotekijällä päästään seuraavaan juureen.

Kompleksiluvulla z $(\neq 0)$ on siis n eri suurta juurta. Näistä määritellään juuren *pääarvoksi* se, jolla on itseisarvoltaan pienin argumentti. Pääarvot muodostavat juuren *päähaaran*. Esimerkiksi luvun -1 kuutiojuuri, ts. pääarvo on tällöin $\frac{1}{2}(1+\mathrm{i}\sqrt{3})$. Tämän arvon antavat myös laskentaohjelmat, joilla voidaan käsitellä kompleksilukuja.

Mathematicalla laaditussa demonstraatiossa [4] voidaan kompleksilukua siirtää hiirellä, jolloin luvun juuret ja myös pääarvo muuttuvat vastaavasti. (Avaus Mathematicalla tai CDF Playerilla.)

Esimerkki 1. Olkoon laskettavana $w = \sqrt[6]{-64}$. Juurrettavan $z = -64$ itseisarvo on tällöin $r = 64$ ja napakulma $\varphi = \pi$. Napakoordinaattiesitys on $z = -64 = 64(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$.

Juuren itseisarvo on tällöin $s = \sqrt[6]{64} = 2$ ja napakulma $\psi = \pi/6 + 2k\pi/6 = \pi(1+2k)/6$. Arvoilla $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ saadaan kulman ψ mahdolliset arvot

$$\frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{6}, \quad \frac{7\pi}{6}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{11\pi}{6}.$$

Arvoa $k = 6$ ei enää tarvitse ottaa huomioon, sillä se antaa arvon $13\pi/6$, mikä vastaa samaa napakulmaa kuin ensimmäinen arvo $\pi/6$. Myöskään tätä isommat tai negatiiviset arvot k eivät enää anna uusia napakulmia. Juuren arvot saadaan siten lausekkeesta $w = s(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$ em. arvojen ψ avulla:

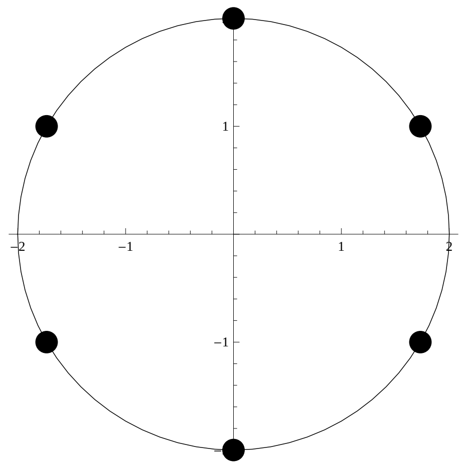
$$w_0 = \sqrt{3} + \mathrm{i}, \quad w_1 = 2\mathrm{i}, \quad w_2 = -\sqrt{3} + \mathrm{i},$$
$$w_3 = -\sqrt{3} - \mathrm{i}, \quad w_4 = -2\mathrm{i}, \quad w_5 = \sqrt{3} - \mathrm{i}.$$

Päähaara-arvo on $\sqrt{3} + \mathrm{i}$.

Nämä saadaan myös lausekkeesta $w_k = w_0 u_6^k$, missä

$$u_6 = \cos\tfrac{2\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\tfrac{2\pi}{6} = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}).$$

Alla oleva kuvio osoittaa juurten sijainnin kompleksitasossa.



Esimerkki 2. Ensimmäisen luvun esimerkin juuret

$$u = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + 11\mathrm{i}} \quad \text{ja}$$
$$v = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 - 11\mathrm{i}}$$

saavat tällöin kumpikin kolme arvoa:

$$u_1 = 2 + \mathrm{i}, \qquad u_2 = -\tfrac{2+\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1-2\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \qquad u_3 = -\tfrac{2-\sqrt{3}}{2} - \tfrac{1+2\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$
$$v_1 = -\tfrac{2-\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1+2\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \qquad v_2 = -\tfrac{2+\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1-2\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \qquad v_3 = 2 - \mathrm{i}.$$

Näistä voidaan muodostaa yhdeksän (u, v)-paria, mutta vain kolme täyttää ehdon $uv = 5$: u_1v_1, u_2v_3 ja u_3v_2. Näiden avulla saadaan ratkaisut:

$$\begin{aligned}
x_1 &= u_1 + v_1 = 4, \\
x_2 &= u_2 + v_3 = -2 + \sqrt{3}, \\
x_3 &= u_3 + v_3 = -2 - \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Esimerkki 3. Olkoon $z_1 = 2\mathrm{i}$ ja $z_2 = -2+2\mathrm{i}\sqrt{3}$. Tällöin $z_1z_2 = -4\sqrt{3}-4\mathrm{i}$. Lukujen neliöjuuret (päähaaran mukaan) ovat

$$\sqrt{z_1} = 1 + \mathrm{i}, \quad \sqrt{z_2} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}, \quad \sqrt{z_1z_2} = -1 + \sqrt{3} - \mathrm{i}(1 + \sqrt{3}).$$

Koska $\sqrt{z_1}\sqrt{z_2} = 1 - \sqrt{3} + \mathrm{i}(1 + \sqrt{3})$, ei yhtälö

$$\sqrt{z_1}\sqrt{z_2} = \sqrt{z_1z_2}$$

ole voimassa.

Juuren laskusäännöt eivät siten rajoituksitta yleisty kompleksialueelle.

Tämä on oneglmana myös ensimmäisen luvun päättelyssä

$$-1 = \mathrm{i}^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{+1} = +1,$$

missä juurimerkki tarkoittaa normaaliin tapaan päähaaraa. Tässä siis keskimmäinen yhtäläisyysmerkki on väärä.

7 Algebran peruslause

Kompleksikertoimiseksi polynomiksi kutsutaan lauseketta

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,$$

missä kertoimet a_k ovat kompleksilukuja. Muuttuja z on luonnollisinta ajatella kompleksiseksi. Kyseessä on siten funktio $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Vastaavasti puhutaan *reaalikertoimisesta polynomista*, jos kertoimet a_k ovat reaalilukuja. Reaalikertoiminen polynomi on kompleksikertoimisen erikoistapaus, ts. jokaista reaalikertoimista polynomia voidaan ajatella myös kompleksikertoimisena. Muuttuja z voidaan tällöin ajatella joko reaaliseksi tai kompleksiseksi: kyseessä on funktio $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tai $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Jos $a_n \neq 0$, on polynomin *asteluku* $\deg p = n$.

Algebran peruslauseeksi kutsutaan seuraavaa väittämää:

Jokaisella vähintään ensimmäistä astetta olevalla kompleksikertoimisella polynomilla p on ainakin yksi (reaalinen tai kompleksinen) nollakohta, so. on olemassa $z_1 \in \mathbb{C}$ siten, että $p(z_1) = 0$.

Algebran peruslause ei päde reaalialueella: esimerkiksi polynomilla z^2+1 ei ole lainkaan nollakohtia reaalilukujoukossa $\mathbb{R}$. Kompleksilukujoukko onkin siinä mielessä reaalilukuja täydellisempi, että algebran peruslause saa yksinkertaisen muodon.

Algebran peruslauseelle on esitetty useita erilaisia todistuksia. Ensimmäisen täydellisen todistuksen esitti *Carl Friedrich Gauss* väitöskirjassaan vuonna 1799. Myöhemmin hän palasi aiheeseen ja esitti vielä neljä muuta todistusta.

Ehkä yleisimmin esitetty todistus perustuu kompleksifunktioiden teoriaan. Kahden muun todistuksen ideat ovat löydettävissä seuraavista Mathematica-dokumenteista: todistus 1 [5], todistus 2 [6]. (Avaus Mathematicalla tai CDF Playerilla.)

8 Polynomin nollakohdat ja tekijöihin jako

Astetta n olevalla kompleksikertoimisella (tai reaalikertoimisella) polynomilla $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ on algebran peruslauseen mukaan ainakin yksi (mahdollisesti kompleksinen) nollakohta z_1. Tällöin siis on $p_n(z_1) = 0$.

Jakolaskun $p_n(z)/(z-z_1)$ tuloksena saadaan osamäärä $q_{n-1}(z)$, joka on $n-1$-asteinen polynomi, ja jakojäännös $r(z)$. Koska jakojäännös on alempaa astetta kuin jakaja, on polynomin $r(z)$ asteluku 0, ts. kyseessä on vakio: $r(z) = r$. Tällöin on

$$p_n(z) = (z - z_1)q_{n-1}(z) + r.$$

Sijoittamalla tähän $z = z_1$ saadaan $r = 0$, jolloin

$$p_n(z) = (z - z_1)q_{n-1}(z),$$

ts. polynomi $p_n(z)$ on jaollinen tekijällä $z - z_1$.

Askel voidaan toistaa: Jos $n-1 > 0$, polynomilla $q_{n-1}(z)$ on nollakohta z_2 ja $q_{n-1}(z)$ on jaollinen tekijällä $z - z_2$. Tällöin $p_n(z) = (z - z_1)(z - z_2)q_{n-2}(z)$. Näin voidaan jatkaa, kunnes päädytään yhtälöön

$$p_n(z) = (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n)q_0(z).$$

Polynomin $q_0(z)$ asteluku on 0, joten kyseessä on vakio eikä algebran peruslausetta enää voida soveltaa. Oikeanpuolen kertolasku osoittaa, että kyseessä on potenssin z^n kerroin, ts. $q_0(z) = a_n$.

Siis:

Polynomi voidaan aina jakaa ensimmäistä astetta oleviin tekijöihin:

$$p_n(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n).$$

Luvut z_1, z_2, $\ldots$, z_n ovat polynomin $p_n(z)$ nollakohdat. Näiden joukossa saattaa olla yhtä suuria ja reaalisenkin polynomin tapauksessa ne saattavat kaikkikin olla kompleksisia. Jos yhtä suuret juuret lasketaan kertalukunsa mukaisesti, ts. otetaan niin moneen kertaan kuin ne tekijöissä esiintyvät, voidaan sanoa, että astetta n olevalla polynomilla on n nollakohtaa.

Tarkkoja arvoja polynomin nollakohdille ei aina voida esittää juurilausekkeina. Tunnetusti toisen asteen polynomin nollakohdille on yksinkertaiset ratkaisukaavat. Kolmannen ja neljännen asteen polynomillakin on ratkaisukaavat, mutta kovin yksinkertaisia ne eivät ole. Esimerkkinä olkoot kolmannen asteen yhtälön $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ratkaisukaavat laskentaohjelma Mathematican antamina:

$$
\begin{aligned}
x_1 =& \frac{\sqrt[3]{\sqrt{\left(27a^2d-9abc+2b^3\right)^2-4\left(b^2-3ac\right)^3}-27a^2d+9abc-2b^3}}{3\sqrt[3]{2}a} \\
&- \frac{\sqrt[3]{2}\left(3ac-b^2\right)}{3a\sqrt[3]{\sqrt{\left(27a^2d-9abc+2b^3\right)^2-4\left(b^2-3ac\right)^3}-27a^2d+9abc-2b^3}} - \frac{b}{3a},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2 =& -\frac{\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{\sqrt{\left(27a^2d-9abc+2b^3\right)^2-4\left(b^2-3ac\right)^3}-27a^2d+9abc-2b^3}}{6\sqrt[3]{2}a} \\
&+ \frac{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(3ac-b^2\right)}{3\cdot 2^{2/3}a\sqrt[3]{\sqrt{\left(27a^2d-9abc+2b^3\right)^2-4\left(b^2-3ac\right)^3}-27a^2d+9abc-2b^3}} - \frac{b}{3a},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_3 =& -\frac{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{\sqrt{\left(27a^2d-9abc+2b^3\right)^2-4\left(b^2-3ac\right)^3}-27a^2d+9abc-2b^3}}{6\sqrt[3]{2}a} \\
&+ \frac{\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\left(3ac-b^2\right)}{3\cdot 2^{2/3}a\sqrt[3]{\sqrt{\left(27a^2d-9abc+2b^3\right)^2-4\left(b^2-3ac\right)^3}-27a^2d+9abc-2b^3}} - \frac{b}{3a}.
\end{aligned}
$$

Viidennen ja korkeampien asteiden polynomien nollakohdille ei ole olemassa yleisiä algebrallisia (so. juurilausekkeisiin perustuvia) ratkaisukaavoja, kuten norjalainen matemaatikko *Niels Henrik Abel* vuonna 1824 osoitti.

Mielivaltaisen tarkkoja numeerisia approksimaatioita nollakohdille voidaan kyllä löytää.

9 Reaalikertoimisen polynomin tekijöihin jako

Olkoon z_0 reaalikertoimisen polynomin $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ kompleksinen nollakohta. Tällöin on

$$p(z_0) = 0 \qquad \text{eli} \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k z_0^k = 0.$$

Siirtymällä puolittain liittolukuihin saadaan

$$\sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \bar{z}_0^k = 0,$$

koska summan ja tulon liittoluvut voidaan muodostaa termeittäin ja tekijöittäin. Polynomin reaalikertoimisuuden takia tämä saa muodon

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}_0^k = 0,$$

ts. $p(\bar{z}_0) = 0$.

Siis:

Jos reaalikertoimisella polynomilla on nollakohtana kompleksiluku z_0, myös liittoluku $\bar{z}_0$ on polynomin nollakohta. Reaalikertoimisen polynomin kompleksiset nollakohdat esiintyvät aina tällä tavoin pareittain.

Jos polynomi nyt jaetaan ensimmäisen asteen tekijöihin, näiden joukossa on tekijät $z - z_0$ ja $z - \bar{z}_0$, joiden tulo on

$$(z - z_0)(z - \bar{z}_0) = z^2 - (z_0 + \bar{z}_0)z + z_0\bar{z}_0 = z^2 - 2(\operatorname{Re} z_0)z + |z_0|^2.$$

Tässä $\operatorname{Re} z_0$ ja $|z_0|$ ovat reaalisia, joten kyseessä on reaalikertoiminen toisen asteen tekijä.

Siis:

Reaalikertoiminen polynomi voidaan aina jakaa enintään toista astetta oleviin reaalikertoimisiin tekijöihin. Reaalisia nollakohtia vastaavat ensimmäisen asteen tekijät, nollakohtina olevia liittolukupareja vastaavat toisen asteen tekijät.

Esimerkki 1. Yhtälöstä $z^4 = 1$ seuraa $z^2 = 1$ ja $z^2 = -1$ ja näistä edelleen yhtälön juuret $z_1 = 1$, $z_2 = -1$, $z_3 = \mathrm{i}$ ja $z_4 = -\mathrm{i}$. Polynomin $z^4 - 1$ nollakohdat ovat siten 1, -1, i ja $-\mathrm{i}$, jolloin se voidaan jakaa ensiasteisiin tekijöihin seuraavasti:

$$z^4 - 1 = (z - 1)(z + 1)(z - \mathrm{i})(z + \mathrm{i}).$$

Kahden viimeisen tekijän tulo on reaalikertoiminen toisen asteen polynomi, jolloin päästään reaalikertoimiseen tekijöihin jakoon:

$$z^4 - 1 = (z - 1)(z + 1)(z^2 + 1).$$

Esimerkki 2. Polynomin $z^6 + 64$ nollakohdat eli juuren $\sqrt[6]{-64}$ kaikki arvot ovat

$$z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i}, \quad z_2 = 2\mathrm{i}, \quad z_3 = -\sqrt{3} + \mathrm{i},$$
$$z_4 = -\sqrt{3} - \mathrm{i}, \quad z_5 = -2\mathrm{i}, \quad z_6 = \sqrt{3} - \mathrm{i}.$$

Tässä on $z_4 = \bar{z}_3$, $z_5 = \bar{z}_2$ ja $z_6 = \bar{z}_1$.

Polynomin jako ensimmäisen asteen tekijöihin on kompleksikertoiminen:

$$z^6 + 64 = (z - z_1)(z - \bar{z}_1)(z - z_2)(z - \bar{z}_2)(z - z_3)(z - \bar{z}_3).$$

Kun tekijät yhdistetään pareittain, saadaan

$$\begin{aligned}(z - z_1)(z - \bar{z}_1) &= z^2 - 2\sqrt{3}z + 4,\\ (z - z_2)(z - \bar{z}_2) &= z^2 + 4,\\ (z - z_3)(z - \bar{z}_3) &= z^2 + 2\sqrt{3}z + 4,\end{aligned}$$

jolloin saadaan jako reaalikertoimisiin toisen asteen tekijöihin:

$$z^6 + 64 = (z^2 + 4)(z^2 + 2\sqrt{3}z + 4)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4).$$

10 Eksponenttifunktio

Tavalliset reaalialueelta tunnetut alkeisfunktiot kuten eksponenttifunktio, logaritmifunktio ja trigonometriset sekä hyperboliset funktiot käänteisfunktioineen voidaan laajentaa kompleksitasoon. Lähtökohtana on tällöin eksponenttifunktio, jolla on kaikilla reaaliarvoilla x suppeneva Maclaurinin sarja:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Luontevaa olisi asettaa kompleksisen eksponenttifunktion määritelmäksi

$$\mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Tällöin on kuitenkin vakuututtava sarjan suppenevuudesta.

Sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ suppeneminen tarkoittaa, että osasummilla $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ on raja-arvo, kun $n \to \infty$. Cauchyn yleisen suppenemisehdon mukaan näin on, jos ja vain jos mikä tahansa määrä p osasummaan kuulumattomia termejä $a_{n+1},\ a_{n+2},\ \ldots,\ a_{n+p}$ muuttaa osasumman arvoa sitä vähemmän, mitä suurempi indeksi n on. Täsmällisemmin sanoen: Sarja suppenee, jos ja vain jos jokaista positiivilukua ε kohden löytyy indeksiraja n_0 siten, että

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \text{ kaikilla } p, \text{ kun } n > n_0.$$

Kompleksilukujen kolmioepäyhtälön mukaan on

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{z^k}{k!}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|z|^k}{k!}.$$

Oikeanpuolisessa lausekkeessa on kyse reaalisen eksponenttifunktion sarjasta muuttujana $|z|$, vasemmalla on itseisarvomerkkien sisällä kompleksisen sarjan vastaava termi. Reaalisen sarjan suppenevuudesta johtuen oikea puoli täyttää Cauchyn suppenemisehdon vaatimuksen. Koska vasen puoli on enintään oikean puolen suuruinen, kompleksinenkin sarja täyttää vaatimuksen indeksirajana sama n_0.

Kompleksinen sarja siis suppenee kaikilla $z \in \mathbb{C}$, ja sen summaa voidaan ryhtyä kutsumaan *kompleksiseksi eksponenttifunktioksi* merkintänä e^z tai yhtä hyvin $\exp z$ (tai $\exp(z)$).

Määrittely suppenevana sarjana ei kuitenkaan anna helppoa tapaa eksponenttifunktion arvojen laskemiseen. Funktiolle saadaan kuitenkin varsin yksinkertainen lauseke, joka lisäksi kytkee eksponenttifunktion ja trigonometriset funktiot ehkä yllättävälläkin tavalla:

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y), \quad \text{missä } z = x + \mathrm{i}y.$$

Tuloksen todistamiseksi on helpointa lähteä kaavan oikeasta puolesta. Koska y on reaalinen, voidaan $\sin y$ ja $\cos y$ lausua reaalisina Maclaurinin sarjoina ja sijoittaa näihin $-1 = \mathrm{i}^2$:

$$\begin{aligned}
&\cos y + \mathrm{i}\sin y \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, y^{2k} + \mathrm{i}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, y^{2k+1} \\
&\quad = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{2k}}{(2k)!}\, y^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^{2k+1}}{(2k+1)!}\, y^{2k+1} \\
&\quad = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}y)^j}{j!}.
\end{aligned}$$

Saadut kaksi sarjaa voidaan viimeisessä vaiheessa yhdistää yhdeksi sarjaksi, jonka parillisindeksiset termit saadaan edellisestä ja paritonindeksiset jälkimmäisestä sarjasta.

Saatu tulos on kompleksisen eksponenttifunktion määritelmän mukaisesti $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$. On saatu *Eulerin kaava*:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y, \quad \text{missä } y \text{ on reaalinen.}$$

Sijoittamalla tähän $y = \pi$ saadaan yhteys $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$.

Vielä pitäisi osoittaa, että $\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^z$, missä $z = x + \mathrm{i}y$. Tämä on selvää, jos kompleksinen eksponenttifunktio noudattaa tavanomaista potenssien laskusääntöä. Sääntö on kuitenkin todistettava sarjamääritelmään perustuen.

Todistus ei mitenkään erityisesti perustu kompleksilukujen ominaisuuksiin, joten lähtökohtana olkoon kaksi sarjaesitystä muuttujina u ja v:

$$\mathrm{e}^u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!}, \quad \mathrm{e}^v = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v^j}{j!}.$$

Sarjojen kertominen keskenään vastaa summien kertomista: jokaisella toisen sarjan termillä kerrotaan jokainen toisen sarjan termi ja tulot summeerataan. Termien tulot ovat muotoa $\dfrac{u^k v^j}{k! j!}$. Koska termejä on äärettömän paljon, niiden summeeraus on ongelmallista ja edellyttää suppenemistarkasteluja. Sarjojen tulo muodostetaankin ns. *Cauchyn tulona*[5], missä summeeraus tapahtuu tietyssä järjestyksessä:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^u \mathrm{e}^v &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{v^j}{j!} \\
&= (1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^4}{24} + \dots) \times (1 + v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{6} + \frac{v^4}{24} + \dots) \\
&= 1 + (u+v) + \tfrac{1}{2}(u^2 + 2uv + v^2) + \tfrac{1}{6}(u^3 + 3u^2 v + 3uv^2 + v^3) \\
&\quad + \tfrac{1}{24}(u^4 + 4u^3 v + 6u^2 v^2 + 4uv^3 + v^4) + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u+v)^k}{k!} = \mathrm{e}^{u+v}.
\end{aligned}$$

Termit on tässä summeerattu muuttujien u ja v yhteisen asteluvun mukaan: ensin vakiotermi, sitten ensimmäisen asteen termit, sitten toisen asteen jne. Tulos on selvästikin eksponenttifunktiota määrittelevä sarja muuttujana $u + v$, ja potenssien laskusääntö on siten todistettu päteväksi.

Kompleksisella eksponenttifunktiolla on siis ominaisuus

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y), \quad z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}.$$

Tämä on napakoordinaattiesitys, joka osoittaa, että

$$|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x \quad \text{ja} \quad \arg \mathrm{e}^z \equiv y \pmod{2\pi}.$$

Edellä oleva lasku osoittaa myös, että eksponenttifunktion laskusäännöt ovat yleisestikin voimassa: Kaikilla $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ pätee

$$\mathrm{e}^{z_1} \mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1 + z_2}.$$

[5]Sarjojen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ja $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ Cauchyn tulo esitetään yleensä lausekkeena $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$, jolloin äärellisen monen termin summa $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$ on sarjan k:s termi. Tähän on kerätty ne tulot $a_i b_j$, joissa indeksien summa on vakio k. Esillä olevassa tapauksessa on $c_k = \sum_{j=0}^{k} \frac{u^j}{j!} \frac{v^{k-j}}{(k-j)!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u^j v^{k-j} = \frac{1}{k!}(u+v)^k$, missä $\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}$ on binomikerroin. Cauchyn tulossa syntyvän sarjan suppeneminen edellyttää yleisessä tapauksessa joidenkin lisäehtojen voimassaoloa, mutta potenssisarjojen tapauksessa ei ongelmia ole.

Lukija osoittakoon, että myös $1/\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{-z}$.

Napakoordinaattiesityksestä seuraa, että kompleksisella eksponenttifunktiolla on jaksona $2\pi\mathrm{i}$:

$$\exp(z + 2\pi\mathrm{i}) = \exp z \quad \text{eli} \quad \mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z \quad \text{kaikilla } z \in \mathbb{C}.$$

11 Logaritmifunktio

Eksponenttifunktion jaksollisuudesta seuraa, että sillä ei ilman määrittelyjoukon rajoittamista voi olla käänteisfunktiota. Tilanteen tarkempi tutkiminen perustuu yhtälöön

$$\mathrm{e}^w = z, \quad \text{missä } w = u + \mathrm{i}v \text{ ja } z = x + \mathrm{i}y.$$

Tästä pyritään ratkaisemaan w.

Olkoon $r = |z|$ ja $\varphi = \arg z$. Yhtälö saa tällöin napakoordinaateissa muodon

$$\mathrm{e}^u(\cos v + \mathrm{i}\sin v) = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi),$$

jolloin tulee olla

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^u = r \quad \text{eli} \quad u = \log r = \log|z| \quad \text{ja} \\ &v = \varphi + 2k\pi = \arg z + 2k\pi \text{ jollakin arvolla } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Tässä log tarkoittaa reaalialueen luonnollista logaritmia.[6]

Kompleksiselle logaritmifunktiolle $\log z = w = u + \mathrm{i}v$ saadaan siis lauseke

$$\log z = \log|z| + \mathrm{i}\arg z + 2k\pi\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Jos $k = 0$, kyseessä on logaritmin *päähaara*. Tämä on eksponenttifunktion

$$\exp : \{x + \mathrm{i}y \mid x \in \mathbb{R},\ -\pi < y \le \pi\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

käänteisfunktio. Jokaista arvoa $k \neq 0$ vastaten saadaan jokin logaritmifunktion *sivuhaara*. Nämä ovat käänteisfunktioita eksponenttifunktiolle, joka rajoitetaan joukkoon

$$\{x + \mathrm{i}y \mid x \in \mathbb{R},\ -\pi + 2k\pi < y \le \pi + 2k\pi\}.$$

Jos ei toisin mainita, logaritmifunktiolla tarkoitetaan päähaaraa.

Kun eksponenttifunktiosta ja logaritmifunktiosta (päähaarasta) muodostetaan yhdistetty funktio, saadaan seuraavaa ($z = x + \mathrm{i}y$):

$$\begin{aligned} \exp(\log z) &= \exp(\log|z| + \mathrm{i}\arg z) \\ &= \mathrm{e}^{\log|z|}(\cos\arg z + \mathrm{i}\sin\arg z) = |z|(\cos\arg z + \mathrm{i}\sin\arg z) = z; \\ \log(\exp z) &= \log(\mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)) \\ &= \log(\mathrm{e}^x) + \mathrm{i}\arg(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = x + \mathrm{i}(y + 2k\pi) \text{ jollakin } k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

[6] Kompleksilukujen yhteydessä ei yleensä käytetä funktionnimenä ln, vaan log tarkoittaa aina luonnollista logaritmia.

Jälkimmäisessä tapauksessa tulos ei välttämättä olekaan z, kuten funktio–käänteisfunktio-parin tapauksessa pitäisi. Tulokseen z päästäisiin valitsemalla sopiva logaritmifunktion haara, joko päähaara tai jokin sivuhaara riippuen luvun z imaginaariosasta y.

Seurauksena on, että kaikki logaritmin laskusäännöt eivät sellaisinaan yleisty kompleksitapaukseen. Olkoon esimerkiksi $z_1 = -1 + \mathrm{i}$ ja $z_2 = \mathrm{i}$. Näiden tuloksi saadaan $z_1 z_2 = -1 - \mathrm{i}$ ja logaritmeiksi

$$\log z_1 = \log \sqrt{2} + \mathrm{i}\frac{3\pi}{4}, \quad \log z_2 = \mathrm{i}\frac{\pi}{2}, \quad \log(z_1 z_2) = \log \sqrt{2} - \mathrm{i}\frac{3\pi}{4}.$$

Tällöin on

$$\log z_1 + \log z_2 = \log(z_1 z_2) + 2\pi\mathrm{i},$$

jolloin onkin siirrytty logaritmifunktion sivuhaaralle.

Eksponenttifunktion ja logaritmifunktion kantalukuna ei kompleksitapauksessa yleensä käytetä muuta kuin Neperin lukua e. Tarvittaessa muut lausekkeet palautetaan tähän tapaukseen. Täten esimerkiksi

$$\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\log \mathrm{i}} = \mathrm{e}^{-\pi/2}.$$

12 Trigonometriset ja hyperboliset funktiot

Eulerin kaavan mukaan on

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x,$$

missä x on reaalinen. Koska sini on pariton funktio ($\sin(-x) = -\sin x$) ja kosini parillinen ($\cos(-x) = \cos x$), on

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \cos x - \mathrm{i}\sin x.$$

Laskemalla yhtälöt yhteen ja toisaalta vähentämällä edellisestä jälkimmäinen saadaan

$$\cos x = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}), \qquad \sin x = \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}).$$

Reaalinen sini ja reaalinen kosini on täten lausuttu kompleksisen eksponenttifunktion avulla.

Yhtälöt antavat mahdollisuuden yleistää *sinin* ja *kosinin* määritelmät kompleksitasoon:

$$\sin z = \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}), \qquad \cos z = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Hyperbolinen sini ja *hyperbolinen kosini* määritellään jo reaalialueella eksponenttifunktion avulla ja tämä määritelmä on suoraan yleistettävissä kompleksialueelle:

$$\sinh z = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}), \qquad \cosh z = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}), \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Funktioilla on tällöin läheinen yhteys. Esimerkiksi $\sin(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}\sinh z$, $\cos(\mathrm{i}z) = \cosh z$.

Käänteisfunktiot arcsin, arccos, arsinh ja arcosh puolestaan voidaan lausua logaritmin avulla. Esimerkiksi yhtälö

$$\sin w = z \quad \text{eli} \quad \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}) = z$$

on toisen asteen yhtälö, kun tuntemattomaksi otetaan $\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}$. Tämän ratkaisut ovat

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} = \mathrm{i}z \pm \sqrt{1 - z^2},$$

jolloin

$$w = -\mathrm{i}\log(\mathrm{i}z \pm \sqrt{1 - z^2})$$

toteuttaa yhtälön $\sin w = z$. arcsin-funktion päähaaraksi on tapana kiinnittää

$$w = \arcsin z = -\mathrm{i}\log(\mathrm{i}z + \sqrt{1 - z^2}),$$

mikä sopii yhteen reaalisen arcsin-funktion kanssa.

Kompleksialueella kaikki transkendenttiset alkeisfunktiot on siten mahdollista palauttaa joko eksponenttifunktioon tai logaritmiin.

Tekstissä olevat linkit avaavat kyseessä olevan viitteen, mikäli dokumentti on peräisin palvelimelta, jossa on käytettävissä täydellinen MatTa-materiaali. Jos dokumentti sijaitsee muualla (esimerkiksi omaan koneeseen asennettuna), voidaan viitteet avata alla olevan luettelon osoitteista.

Viitteet

[1] Kahden kompleksiluvun summa ja tulo:
http://matta.hut.fi/matta/geogebra/c.html

[2] Kompleksilukujen määrittely pdf-dokumenttina:
http://matta.hut.fi/matta/mma/ckunta.pdf

[3] Kompleksilukujen määrittely Mathematica-dokumenttina (tarvitaan Mathematica tai CDF Player): http://matta.hut.fi/matta/mma/ckunta.nb

[4] Kompleksiluvun juuret (tarvitaan Mathematica tai CDF Player):
http://matta.hut.fi/matta/mma/kompleksijuuret.nbp

[5] Algebran peruslauseen todistus, versio 1 (tarvitaan Mathematica tai CDF Player): http://matta.hut.fi/matta/mma/algPeruslause.nbp

[6] Algebran peruslauseen todistus, versio 2 (tarvitaan Mathematica tai CDF Player): http://matta.hut.fi/matta/mma/algPeruslauseG.nbp

Hakemisto

V

Y