Simo K. Kivelä, 9.11.2007

Derivaatta tangentin kulmakertoimena

Pisteet $(a,\ f(a))$ ja $(a+h,\ f(a+h))$ sijaitsevat käyrällä $y = f(x)$. Näiden pisteiden kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Tätä kutsutaan myös funktion *erotusosamääräksi* pisteessä $x = a$. Pisteiden kautta kulkeva suora on käyrän *sekantti*. Kun pisteet lähestyvät toisiaan, ts. $h \to 0$, sekantti kääntyy vähitellen käyrän *tangentiksi*. Tällöin erotusosamäärä lähestyy tangentin kulmakerrointa.

Toisaalta raja-arvoa

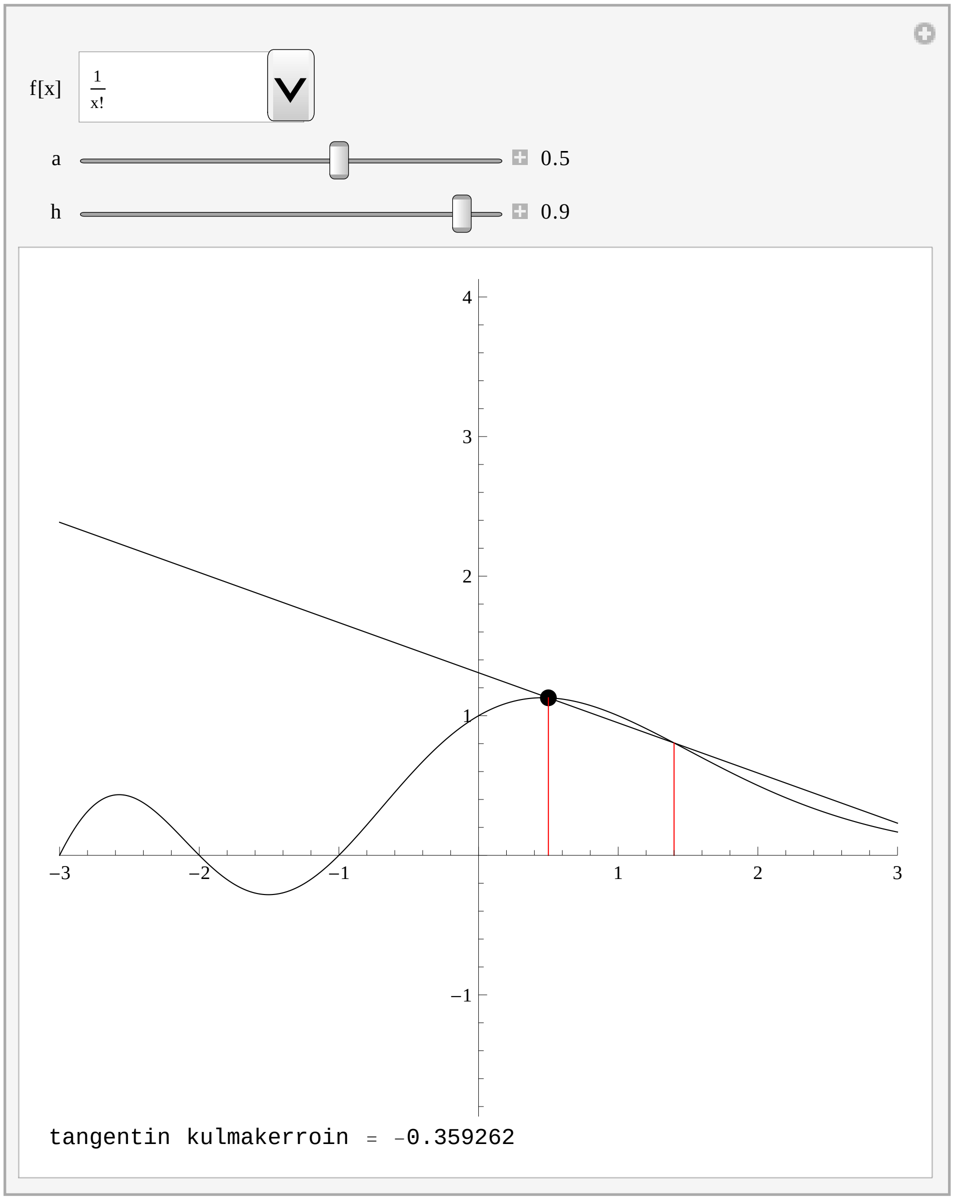
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

kutsutaan *funktion* f *derivaataksi pisteessä* a, ja sitä merkitään $f'(a)$. Tällä tavoin geometrisesti tulkittuna derivaatta on siis funktion kuvaajan tangentin kulmakerroin.

Siirrä alla olevassa demonstraatiossa muuttujaan h liittyvää liukusäädintä siten, että $h \to 0$, ja tarkkaile sekä sekantin kääntymistä että kuvion alapuolella ilmoitetun kulmakertoimen muuttumista.

Voit myös vaihtaa tarkastelupistettä a liukusäätimen avulla tai valita jonkin muun funktion pudotusvalikosta.

Muuttujalle a tai h voi antaa arvon myös näppäimistöltä napauttamalla ensin säätimen vieressä olevaa +-merkkiä.



Tehtäviä

1) Valitse funktioksi $f(x) = x^3 - 1$. Valitse jokin tarkastelupiste a ja pidä se kiinteänä. Muuta h:n arvoa siten, että se lähestyy nollaa a) positiiviselta, b) negatiiviselta puolelta. Lähestyykö tangentin kulmakerroin samaa arvoa riippumatta siitä kummalta puolelta h lähestyy nollaa? Jos näin on, niin kirjaa muistiin a:n arvo ja vastaava kulmakertoimen, ts. derivaatan $f'(a)$ arvo.

2) Anna edellisessä esimerkissä tarkastelupisteelle a useita arvoja tasavälisesti ja riittävän tiheästi. Määritä vastaavat kulmakertoimen eli derivaatan arvot ja tee näistä taulukko. Hahmottele tämän avulla derivaattafunktion $f'(x)$ kuvaaja.

3) Kuten edellinen tehtävä, mutta funktiona a) $\sin(x)$, b) e^x.

4) Kertomafunktion $n!$ määrittely voidaan ns. gammafunktion avulla laajentaa melkein kaikille reaaliluvuille. Piirrä samalla tavoin kuin tehtävässä 2 funktion $f(x) = 1/x!$ derivaatan kuvaaja.

5) Toista ensimmäisen esimerkin tarkastelut, kun funktiona on $f(x) = x\hat{}2 + |\, x - 1\,|$ (merkintä `x^2 + Abs[x - 1]` Mathematican merkintätavan mukaisesti) ja tarkastelupisteenä $a = 1$.

6) Tarkastele funktiota $f(x) = x^3 - 1$ ja jotakin kiinteää a:n arvoa. Laadi taulukko h:n arvoista ja vastaavista kulmakertoimen k arvoista. Hahmottele taulukon perusteella funktion $k(h)$ kuvaaja. Minkä funktion kuvaaja tämä on?