

# Planeettaliike

Gravitaatiolain mukaan kiinteää Aurinkoa kiertävään planeettaan kohdistuu voima

$$\vec{F} = -\frac{G M m}{r^3} \vec{r},$$

missä  $M$  on Auringon massa,  $m$  planeetan massa,  $G$  gravitaatiovakio,  $\vec{r}$  Auringosta planeettaan osoittava vektori ja  $r$  tämän pituus. Miinusmerkki osoittaa, että kyseessä on vetovoima, ts. Aurinko vetää planeettaa puoleensa. Jos systeemissä on kaksi planeettaa, myös näiden keskinäinen vetovoima on otettava huomioon. Planeettoihin kohdistuvat voimat ovat tällöin

$$\vec{F}_1 = -\frac{G M m_1}{r_1^3} \vec{r}_1 - \frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad \text{ja} \quad \vec{F}_2 = -\frac{G M m_2}{r_2^3} \vec{r}_2 - \frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1),$$

missä  $m_1$  ja  $m_2$  ovat planeettojen massat sekä  $\vec{r}_1$  ja  $\vec{r}_2$  niiden paikkavektorit.

Yksinkertaisuuden vuoksi voidaan merkitä  $G = M = 1$ , mikä ei muuta tilannetta kvalitatiivisesti. Koska Newtonin lain mukaan on  $\vec{F} = m \vec{r}''$ , saadaan planeetoille liikeyhtälöt

$$\vec{r}_1'' = -\frac{1}{r_1^3} \vec{r}_1 - \frac{m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad \text{ja} \quad \vec{r}_2'' = -\frac{1}{r_2^3} \vec{r}_2 - \frac{m_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1).$$

Jos oletetaan, että planeetat kiertävät samassa tasossa, vektoreilla  $\vec{r}_1$  ja  $\vec{r}_2$  on kaksi komponenttia. Tällöin kyseessä on neljän skalaarisen toisen kertaluvun differentiaaliyhtälön muodostama ryhmä.

Ryhmän ratkaisuna saadaan kummankin planeetan sijainti ( $x$ - ja  $y$ -koordinaatit) ajan funktioina. Ratkaisu on yksikäsitteinen, kun kiinnitetään alkutilanne: kummankin planeetan sijainti ja nopeus (vektorina) alkuhetkellä. Skalaarisia alkuehtoja on siten kaikkiaan kahdeksan.

Alla olevassa demonstraatioissa voidaan vasemmalla olevassa asetuspaneelissa muuttaa planeettojen massoja ja alkuehtoja. Oikealla puolella olevista grafiikoista ylempi esittää vastaavat planeettojen radat, alempi planeettojen liike-energiat ajan funktiona. Ne saadaan etsimällä differentiaaliyhtälöryhmälle ratkaisu numeerisesti. Paneelissa voidaan muuttaa laskentaväliä ja kuva-alaa.

Kokonaisenergia-painikkeesta avautuu uusi ikkuna, jossa on esitettyä planeettasysteemin kokonaisenergia ajan funktiona. Fysikaalisesti tämän pitäisi olla vakio, mutta koska differentiaaliyhtälöryhmän numeerinen ratkaisu on likimääräinen, ei kokonaisenergia pysy täysin vakiona. Kovin suurta vaihtelua ei kuitenkaan esiinny, mikä antaa aiheen uskoa numeerisen ratkaisun melko hyvään tarkkuuteen.

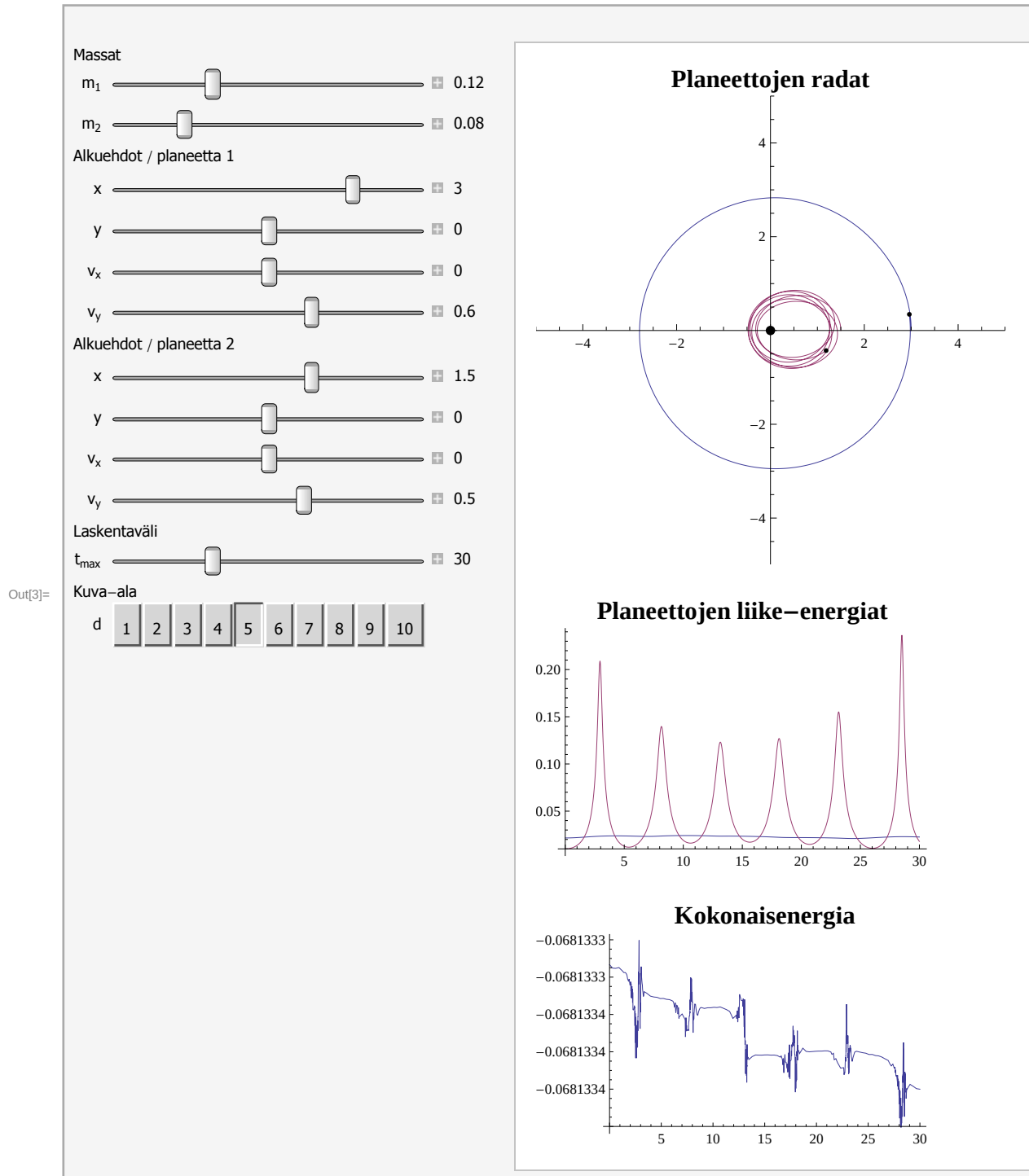
Demonstraation tilanne on idealisoitu ja epätarkka useastakin syystä:

- 1) Planeettojen on oletettu liikkuvan samassa tasossa, ei kolmiulotteisessa avaruudessa.
- 2) Aurinko oletetaan kiinteäksi, vaikka planeettojen vetovoima vaikuttaa myös Auringon sijaintiin.
- 3) Differentiaaliyhtälön numeerinen ratkaiseminen on luonteeltaan approksimatiivista, ts. käytetystä menetelmästä aiheutuu virhettä, joka pyrkii yleensä kumuloitumaan. Mitä pidemmälle aikavälille ratkaisua haetaan, sitä suuremaksi virhe yleensä kasvaa.
- 4) Planeettaliike on tietyissä tilanteissa epästabiili: pienet erot alkuarvoissa tai pienet virheet laskennassa voivat johtaa lyhyelläkin aikavälillä katastrofaalisesti erilaisiin ratakäyriin.

Kvalitatiivisesti oikean kuvan planeettojen mahdollisista radoista demonstraatio kuitenkin antaa..

Asetuspaneelissa on kunkin säätimen oikealla puolella plusmerkki, jota napauttamalla aukeaa syötekenttä sekä muutamia säätimiä. Syötekenttään voi syöttää halutun arvon halutulla tarkkuudella.

Oikeassa ylänurkassa grafiikan yläpuolella on plusmerkki, jonka takaa löytyy muutama valmiiksi määritelty esimerkki. Nämä voidaan ottaa lähtökohdiksi planeettaliikettä tutkittaessa.



### ■ Tehtäviä

- 1) Miksi aloituskonfiguraatiossa toisen planeetan liike-energia vaihtelee voimakkaasti, mutta toisen planeetan liike-energia on likimain vakio?
- 2) Aseta kummankin planeetan massa nolaksi, jolloin planeettojen välinen vuorovaikutus katoaa ja kumpikin liikkuu toisesta riippumatta. (Miksi?) Millaisia planeettojen radat tällöin ovat?
- 3) Tutki valmiiksi määriteltujen esimerkkien avulla tai muulla tavalla, millaisia ratoja syntyy, jos planeetat liikkuvat yhteisen massakeskipisteensä ympäri. Miten planeettojen massojen suhde vaikuttaa liikkeeseen?
- 4) Tutki valmiiksi määriteltujen esimerkkien avulla tai muulla tavoin, millaisia ratoja syntyy, jos planeetat lähes törmäävät toisiinsa.
- 5) Anna toiselle planeetalle alkuehdot, jotka vievät sen suoraan Aurinkoon, ja häiritse liikettä lähellä olevalla toisella planeetalla. Millaisia ratoja syntyy? Miten nämä riippuvat häiritsevästä planeetasta?
- 6) Etsi tilanne, jossa planeetat ovat alussa melkein samassa pisteessä ja niiden radat ovat aluksi x-akselin suhteen symmetrisiä, mutta planeettojen kohdattua uudelleen toinen jää stabiilille radalle ja toinen poistuu äärettömyyteen.
- 7) Tutki systeemin kokonaisenergiaa eri tapauksissa. Miten tarkoin tämä pysyy vakiona?