

ClassPad 330 plus ylioppilaskirjoituksissa apuna

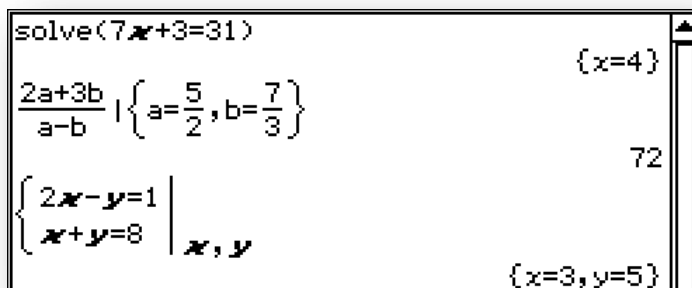
Suomessa sallittiin CAS (Computer Algebra System) –laskimien käyttö kevästä 2012 alkaen ylioppilaskirjoituksissa. Norjassa ja Ruotsissa vastaava kehitys on edennyt jo aiemmin. Tässä on muutamia ratkaisumalleja kevään 2012 lyhyen matematiikan ylioppilaskirjoitusten tehtäviin Casion ClassPad 330 plus –laskimella.

Kommentteja ja vaihtoehtoisia ratkaisutapoja otetaan mielellään vastaan: pepe.palovaara@casio.fi



1. a) Ratkaise yhtälö $7x + 3 = 31$.
b) Laske lausekkeen $\frac{2a+3b}{a-b}$ arvo, kun $a = \frac{5}{2}$ ja $b = \frac{7}{3}$.
c) Ratkaise yhtälöpari
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 8. \end{cases}$$

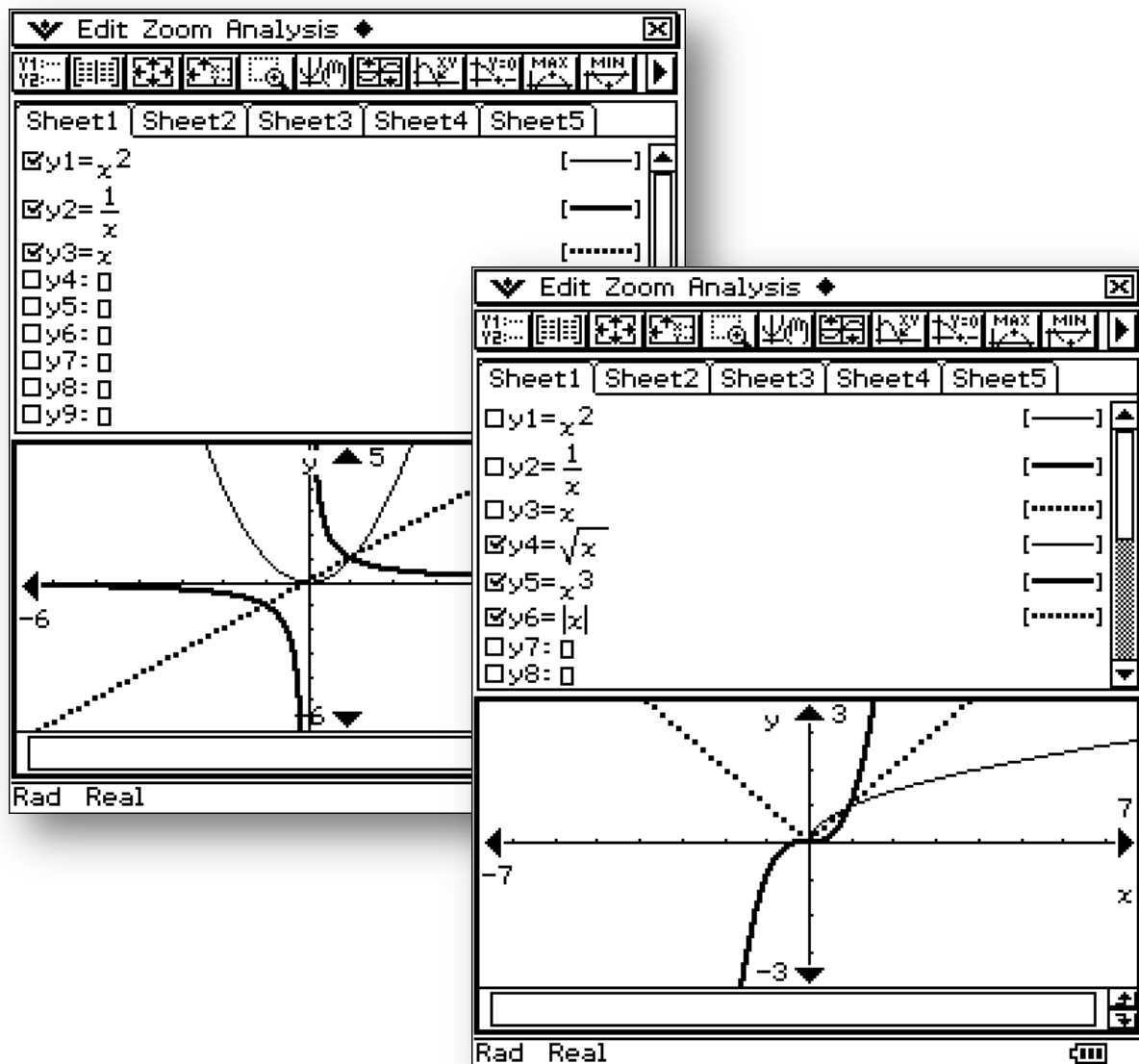
Ratkaisu: Laskimesta vastaukset kaikkiin kohtiin.



2. Kuvissa 1–6 on oheisessa taulukossa mainittujen funktioiden $y = f(x)$ kuvaajat. Kopioi taulukko vastauspaperiisi ja merkitse siihen, mikä kuvaaja esittää annettua funktiota.

$f(x)$	x^2	$\frac{1}{x}$	x	$\sqrt{x}$	x^3	$ x $
Kuva						

Ratkaisu: Laskimesta

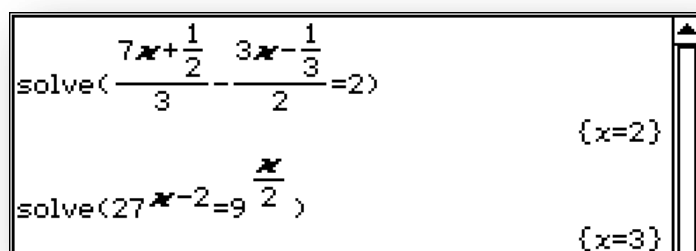


Kuvaajista päätelty oikea rivi 2, 4, 1, 6, 5, 3.

3. a) Ratkaise yhtälö $\frac{7x+\frac{1}{2}}{3} - \frac{3x-\frac{1}{3}}{2} = 2$.

b) Ratkaise yhtälö $27^{x-2} = 9^{\frac{x}{2}}$.

Ratkaisu: Laskimesta



Calculator screen showing the solution of two equations:

Equation 1: $\text{solve}(\frac{7x+\frac{1}{2}}{3} - \frac{3x-\frac{1}{3}}{2} = 2)$ Result: $\{x=2\}$

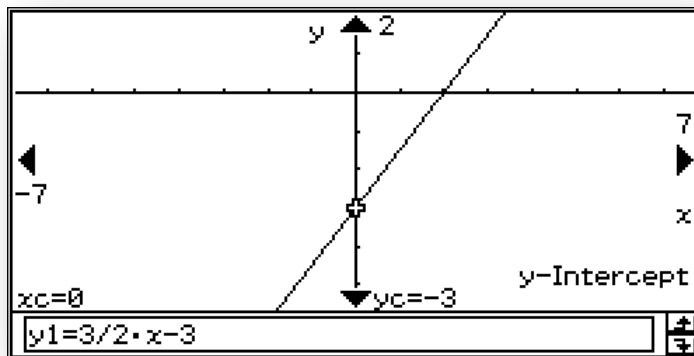
Equation 2: $\text{solve}(27^{x-2} = 9^{\frac{x}{2}})$ Result: $\{x=3\}$

4. a) Funktion $f(x) = \frac{3}{2}x + b$ nollakohta on 2. Määritä vakion b arvo.
- b) Missä pisteessä a-kohdan funktion kuvaaja leikkaa y -akselin?
- c) Kuinka suuren terävän kulman a-kohdan funktion kuvaaja muodostaa x -akselin kanssa? Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

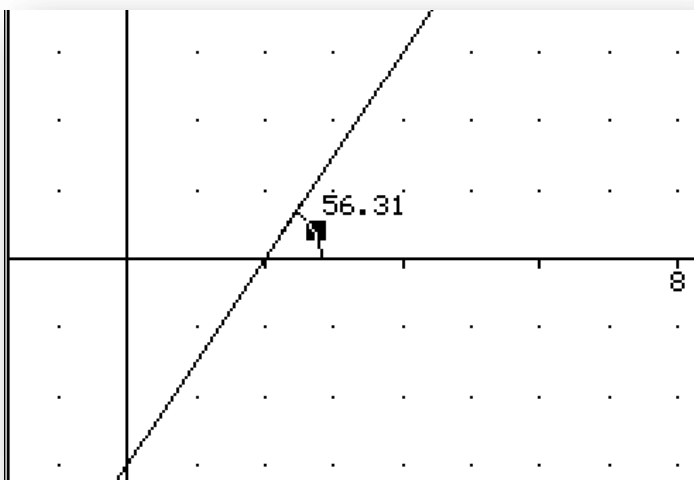
Ratkaisu: Laskimesta a-kohdan vastaukseksi $b = -3$.

```
Define f(x)=3/2*x+b
solve(f(2)=0,b)
{b=-3}
```

Edelleen, laskimen kuvaajan avulla b- kohdan vastaukseksi $(0, -3)$



ja esim. geometria-sovelluksen avulla kulman likiarvoksi $56,1^{\circ}$.



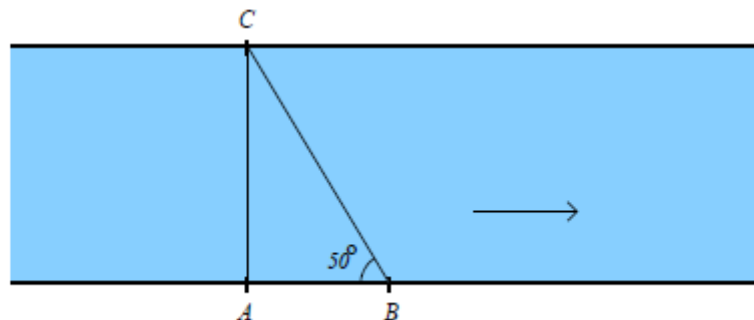
5. Tarkastellaan funktiota $f(x) = (x+3)(x^2-4)$.

- a) Laske funktion $f(x)$ nollakohdat.
- b) Määritä derivaatta $f'(x)$.
- c) Laske derivaatan nollakohdat.

Ratkaisu: Laskimesta

```
Define f(x)=(x+3)(x^2-4)
solve(f(x)=0)
{x=-3,x=-2,x=2}
d/dx(f(x))
3*x^2+6*x-4
solve(d/dx(f(x))=0)
{x=-sqrt(21)/3-1,x=sqrt(21)/3-1}
```

6. Biologi haluaa arvioida joen leveyttä, jotta hän voi asettaa kalojen liikkumista mittaavia laitteita jokeen. Hän katsoo joen rannalla olevasta pisteestä A kohtisuoraan vastarannalla olevaa pistettä C . Pisteestä A hän kävelee 30 metriä alavirtaan pisteeseen B , josta katsottuna vastarannan piste C näkyy 50 asteen kulmassa alla olevan kuvan mukaisesti. Laske joen leveys AC metrin tarkkuudella.

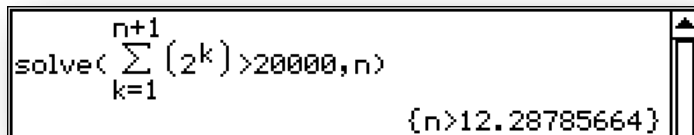


Ratkaisu: Merkitään $AC = x$, jonka jälkeen laskimella saadaan joen leveydeksi likimäärin 36 metriä (laskimen kulmanyksikkönä laskuissa on aste).

```
solve(tan(50)=x/30)
{x=35.75260778}
```

7. Henkilö lähettää sähköpostin kahdelle ystävälleen. Kumpikin näistä lähettää saman viestin 10 minuutin kuluttua edelleen kahdelle uudelle henkilölle, jotka toimivat samoin. Tilanne toistuu kunkin saajan kohdalla aina samalla tavalla, eikä kukaan saa kyseistä sähköpostia toista kertaa. Kuinka kauan kestää, että 20 000 henkilöä on saanut sähköpostin? Anna vastaus 10 minuutin tarkkuudella.

Ratkaisu: Päätellään jonon muodoksi $2 + 2^2 + 2^3 + \dots$, jonka jälkeen laskimella n. 10 minuutin jakson jälkeen viestin saaneiden määrä ylittää 20000 kun


$$\text{solve}\left(\sum_{k=1}^{n+1} (2^k) > 20000, n\right)$$
$$\{n > 12.28785664\}$$

Tästä saadan vastaukseksi kymmenen minuutin tarkkuudella $13 \cdot 10 = 130$ minuuttia = 2h 10 min.

8. Naisten hiusten leikkaus maksaa nyt 45 euroa. Kuinka paljon se maksaa kymmenen vuoden kuluttua, jos hintaa korotetaan vuoden välein 2,5 %?

Ratkaisu: Laskimella vastaukseksi 57,60 euroa.


$$1.025^{10} \times 45$$
$$57.60380449$$

9. Farao Djoser (hallitsi 2667–2648 eaa.) suunnitteli porrasyramidia, jossa on päällekkäin 100 suorakulmaista neliöpohjaista särmiötä niin, että kaikilla on sama korkeus ja jokaisen pohjasärmä on 10 % lyhyempi kuin alla olevan pohjasärmä. Alimmaisien särmiön tilavuus on $10\,000\text{ m}^3$. Määritä tällaisen porrasyramidin tilavuus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.



Porrasyramidi

<<http://fi.wikipedia.org/wiki/Djoser>>. Luettu 29.3.2011.

Ratkaisu: Merkitään alimmaisien pohjaneliön sivua x ja korkeutta y . Toiseksi alimmaisien kerroksen pohjaneliön sivu on tällöin $0,9x$ ja laskimella saadaan tilavuuksien suhteeksi $\frac{81}{100}$.

$x^2 y$	$x^2 \cdot y$
$(0.9x)^2 y$	$\frac{81 \cdot x^2 \cdot y}{100}$
$\frac{81 \cdot x^2 \cdot y}{100} / (x^2 \cdot y)$	$\frac{81}{100}$

Tilavuudet muodostavat geometrisen jonon suhdelukuna $\frac{81}{100}$. Tällöin geometrisen summan kaavaan sijoittamalla 100 särmiön yhteistilavuudeksi saadaan laskimella n. 52600 m^3 .

$\frac{10000 \left(1 - \left(\frac{81}{100} \right)^{100} \right)}{1 - \frac{81}{100}}$	52631.57891
---	-------------

10. Maanjäristyksen voimakkuus M lasketaan kaavalla

$$1,44M = \log_{10} E - 5,24,$$

jossa E on järistyksessä vapautuva energia.

- a) Sendain lähellä vuonna 2011 sattuneen järistyksen voimakkuus oli 9,0. Laske järistyksessä vapautunut energia kahden merkitsevän numeron tarkkuudella.
- b) Kobessa vuonna 1995 sattuneen järistyksen voimakkuus oli 6,8. Kuinka moninkertainen oli Sendain järistyksessä vapautunut energia Koben järistykseen verrattuna?

Ratkaisu: Laskimella a-kohdan vastaus on $1,6 \cdot 10^{18}$.

```
solve(1.44*9.0=log10(E)-5.24,E)
      {E=1.584893192E+18}
```

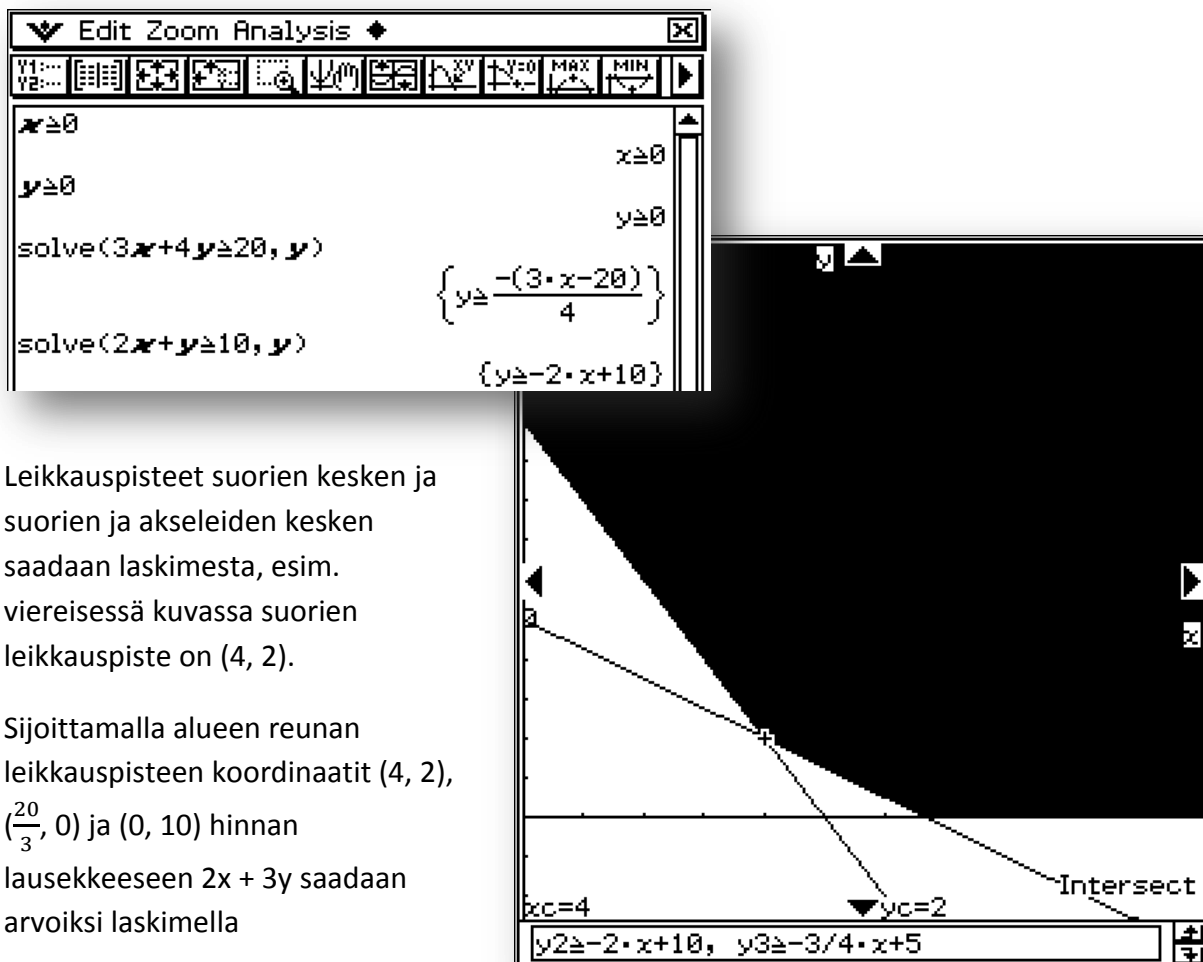
Merkitään vapautuneita energioita Sendaissa = x ja Kobessa = y , jolloin laskimella

```
solve(1.44*9.0=log10(x)-5.24,x)
      {x=1.584893192E+18}
solve(1.44*6.8=log10(y)-5.24,y)
      {y=1.076465214E+15}
1.584893192E+18
1.076465214E+15
1472.312501
```

josta pyöristetään vastaukseksi n. 1500-kertainen.

11. Levitoimiseen tarvittavassa taikajuomassa on oltava vähintään 20 hyppysellistä jauhetta lepakon siipeä ja vähintään 10 hyppysellistä hämähäkin seittiä. Taikajuomapuodissa on kahta valmissekoitetta Ascensus ja Sursum. Pikarillinen Ascensusta maksaa kaksi kultarahaa, ja siinä on kolme hyppysellistä lepakon siipeä ja kaksi hyppysellistä hämähäkin seittiä. Pikarillinen Sursumia maksaa kolme kultarahaa. Siinä puolestaan on neljä hyppysellistä lepakon siipeä ja yksi hyppysellinen hämähäkin seitti. Kuinka paljon kumpaakin sekoitetta kannattaa levitoijakokelaan ostaa, jotta hän saisi taikajuoman mahdollisimman edullisesti?

Ratkaisu: Merkitään Ascenuksen määrää = x ja Sursumin määrää = y . Muodostetaan lepakon siipeä ja hämähäkin seittiä vastaavat määrät eri sekoituksissa ja piirretään ehtoja vastaavat suorat laskimella.



$2x+3y \{x=0, y=10\}$	30
$2x+3y \{x=\frac{20}{3}, y=0\}$	$\frac{40}{3}$
$2x+3y \{x=4, y=2\}$	14

Edullisin hinta on siis $\frac{40}{3}$ kultarahaa ja se saavutetaan hankkimalla ainoastaan $\frac{20}{3}$ pikarillista Ascenusta eikä lainkaan Sursumia.

12. Leonardo Pisano (1170–1250), kutsumanimeltään Fibonacci, määritteli noin vuonna 1210 lukujonon (f_n) kaavoilla

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

a) Määritä luvut $f_3, f_4, \dots, f_{10}$.

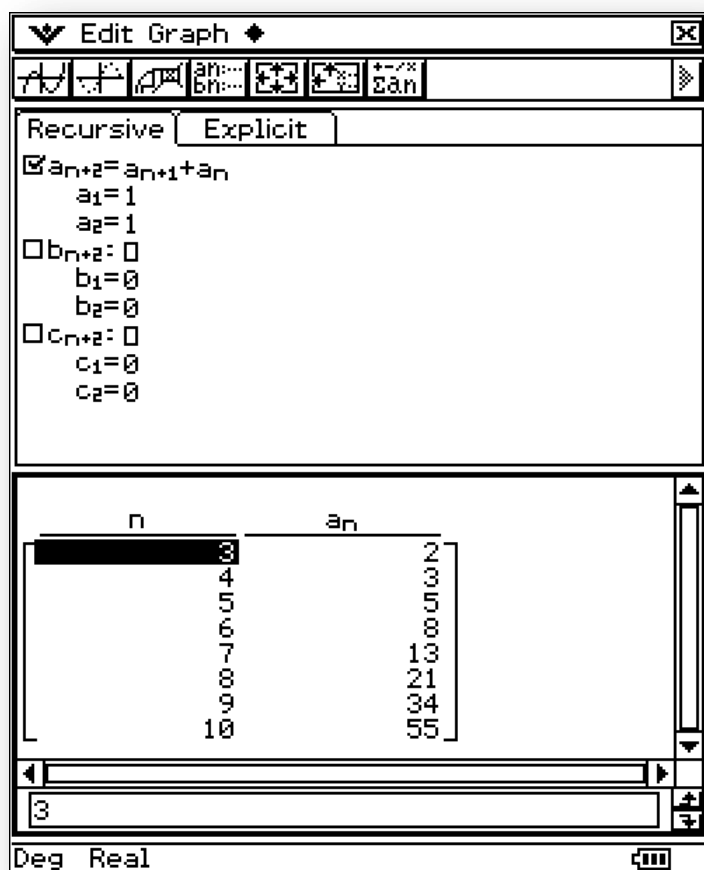
b) Kreikkalaiset kutsuivat lukua $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1,618034$ kultaiseksi leikkaukseksi. Sen avulla saadaan Fibonacciin luvuille kaava

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - (-\varphi)^{-n}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Näytä, että kaava on oikea, kun $n = 1$ ja $n = 2$.

c) Näytä, että yhtälön $x^2 - x - 1 = 0$ juuret ovat φ ja $-\frac{1}{\varphi}$.

Ratkaisu: Laskimen lukujonojen avulla a-kohtaan saadaan kysytty lukujonon jäsenet ovat 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 ja 55.



b-kohta ratkeaa laskimella

Define $f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}(\theta^n-(-\theta)^{-n})$	
	done
$f(n) \left\{\theta=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), n=1\right\}$	1
$f(n) \left\{\theta=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}), n=2\right\}$	1

C-kohdan ratkaisu laskimella

solve($x^2-x-1=0$)	$\left\{x=\frac{-\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}, x=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}\right\}$
factor($\frac{-\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}$)	$\frac{-(\sqrt{5}-1)}{2}$
factor($\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}$)	$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
simplify($-\frac{1}{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})}$)	$\frac{-(\sqrt{5}-1)}{2}$

13. Simeoni osti Saapasnahkatornin 12 000 eurolla ja teetti siihen myöhemmin 4 000 euron peruskorjauksen. Yksitoista vuotta myöhemmin hän myi sen Juhalle 42 000 eurolla. Voitosta on maksettava 30 % pääomatuloveroa. Verottaja tulkitsee voitoksi summan, joka saadaan, kun myyntihinnasta vähennetään ostohinta ja peruskorjauskulut. Toisaalta Simeoni voi myös halutessaan käyttää ns. hankintameno-olettamaa. Tällöin myyntihinnasta vähennetään 20 %, jos on omistanut tornin alle 10 vuotta, ja 40 %, jos on omistanut yli 10 vuotta. Mitään muita vähennyksiä ei saa tehdä. Jäljelle jääneestä summasta maksetaan 30 % pääomatuloveroa.
- a) Paljonko Simeonille jää myyntihinnasta verotuksen jälkeen, kun hän valitsee edullisemman vaihtoehdon?
- b) Mikä olisi sellainen myyntihinta, että Simeoni maksaisi kummassakin verotusvaihtoehdossa yhtä suuren veron?

Ratkaisu: Laskimella

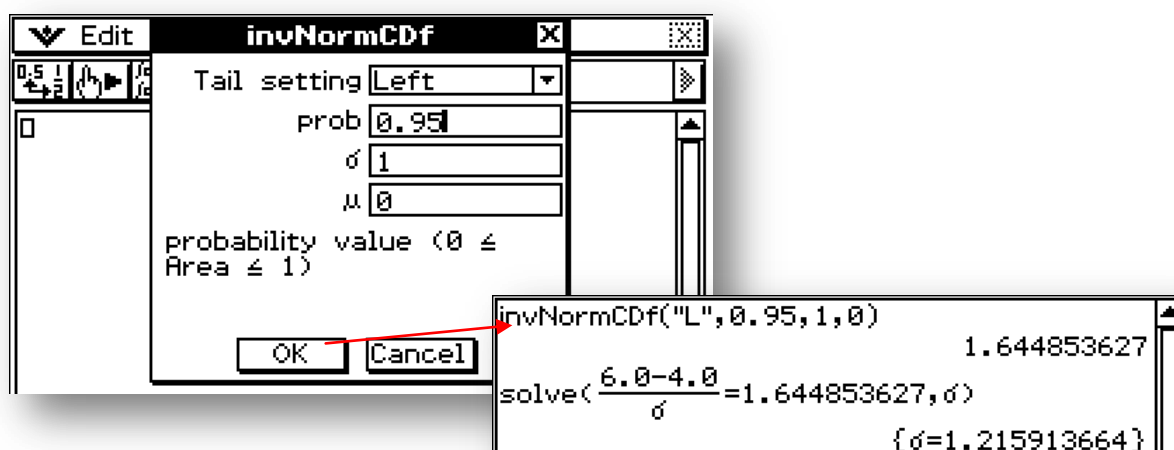
$42000 - (42000 - 12000 - 4000) * 0.3$	34200
$42000 - 42000 * 0.6 * 0.3$	34440

Kannattaa siis käyttää hankintameno-olettamaa, jolloin Simeonille jää 34440 euroa. B-kohdassa ratkaistaan yhtälö laskimella ja saadaan myyntihinnaksi 40000 euroa.

```
solve(x - (x - 12000 - 4000) * 0.3 = x - x * 0.6 * 0.3)
{x=40000}
```

14. Vuorokauden keskilämpötila maaliskuussa on eräällä paikkakunnalla normaalijakautunut niin, että odotusarvo on $4,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ ja 90 % vuorokautisista keskilämpötiloista on $2,0\text{ }^{\circ}\text{C} - 6,0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Laske keskilämpötilan keskihajonta.

Ratkaisu: Nyt ylärajan 6,0 alle jää 95% lämpötiloista, joten normitetuksi ylärajaksi saadaan laskimella 1,644853627. Normituskaavasta voidaan laskimella ratkaista keskihajonnaksi n. 1,2.



15. a) Määritä yhtälön

$$\sin(2x+4^{\circ}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ratkaisut välillä $x \in [0^{\circ}, 90^{\circ}]$.

- b) Määritä a-kohdan yhtälön kaikki ratkaisut.

Ratkaisu: Laskimella a-kohtaan 28° ja 58° ja b-kohtaan $28^{\circ} + n \cdot 180^{\circ}$ tai $58^{\circ} + n \cdot 180^{\circ}$.

