

ClassPad 330 plus ylioppilaskirjoituksissa apuna

Suomessa sallittiin CAS (Computer Algebra System) –laskimien käyttö kevästä 2012 alkaen ylioppilaskirjoituksissa. Norjassa ja Ruotsissa vastaava kehitys on edennyt jo aiemmin. Tässä on muutamia ratkaisumalleja kevään 2012 pitkän matematiikan ylioppilaskirjoitusten tehtäviin Casion ClassPad 330 plus –laskimella.

Kommentteja ja vaihtoehtoisia ratkaisutapoja otetaan mielellään vastaan: pepe.palovaara@casio.fi

1. Ratkaise yhtälöt

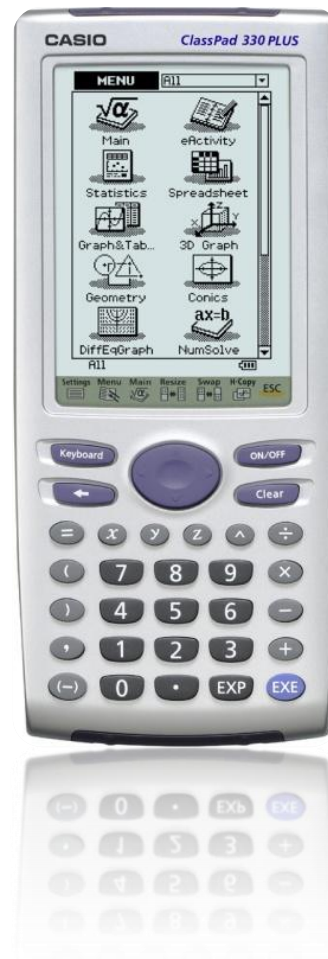
a) $x^2 - x - 6 = 0$

b) $\frac{x}{6} - \frac{x-3}{2} - \frac{7}{9} = 0$

c) $\frac{x}{2} - \frac{2}{x} = 0$

Ratkaisu: Laskimesta

```
solve( $x^2 - x - 6 = 0$ )  
           {x=-2, x=3}  
solve( $\frac{x}{6} - \frac{x-3}{2} - \frac{7}{9} = 0$ )  
           {x= $\frac{13}{6}$ }  
solve( $\frac{x}{2} - \frac{2}{x} = 0$ )  
           {x=-2, x=2}
```



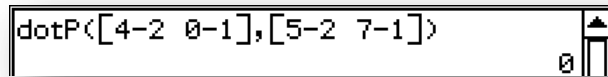
2. a) Laske lausekkeen $\frac{15}{4} - \left(\frac{6}{3}\right)^2$ arvo.
- b) Laske lausekkeen $\sqrt{6 \cdot (3!)} - 6$ arvo.
- c) Sievennä lauseke $\ln \frac{x}{2} + \ln 2$.
- d) Sievennä lauseke $\sin^2 x + \cos^2(x + 2\pi)$.
- e) Laske integraali $\int_0^1 (x+1) dx$.
- f) Laske funktion $f(x) = 4e^{2x}$ derivaatta kohdassa $x = 0$.

Ratkaisu: Laskimesta

$\frac{15}{4} - \left(\frac{6}{3}\right)^2$	$-\frac{1}{4}$
$\sqrt{6 \cdot (3!)} - 6$	0
$\text{simplify}(\ln(\frac{x}{2}) + \ln(2))$	$\ln(x)$
$\text{simplify}((\sin(x))^2 + (\cos(x+2\pi))^2)$	1
$\int_0^1 (x+1) dx$	$\frac{3}{2}$
$\frac{d}{dx}(4e^{2x}) _{x=0}$	8

3. Näytä, että pisteet $A = (2,1)$, $B = (4,0)$ ja $C = (5,7)$ ovat suorakulmaisen kolmion kärjissä.

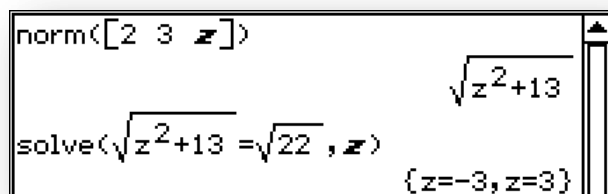
Ratkaisu: Kulmasta A lähtevät vektorit ovat kohtisuorassa, koska niiden pistetulo on 0.
Tällöin kolmio BAC on suorakulmainen.



dotP([4-2 0-1],[5-2 7-1])
0

4. Määritä kaikki vektorit $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, joiden pituus on $\sqrt{22}$ ja joiden kohtisuora projektio xy -tasolle on vektori $2\vec{i} + 3\vec{j}$.

Ratkaisu: Vektorin on oltava muotoa $a = 2i + 3j + zk$ ja vektorin pituuden on oltava $\sqrt{22}$.
Laskimesta



norm([2 3 z])
 $\sqrt{z^2+13}$
solve($\sqrt{z^2+13} = \sqrt{22}$, z)
{z=-3,z=3}

Joten vastaukseksi saadaan kaksi vektoria $a = 2i + 3j \pm 3k$.

5. Määritä funktion $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ suurin arvo, kun $x > 0$.

Ratkaisu: Funktio on jatkuva ja derivoituva kun $x > 0$. Laskimesta

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\ln(x)}{x} \right) = \frac{-(\ln(x)-1)}{x^2}$$

solve(ans=0) $\{x=e\}$

Lisäksi kulkukaavio laskimen mukaan

y1=ln(x)/x							
x	0		2.72		4.48		11.7
f'(x)	undefined	+	0	-	0.0	-	0.0
f''(x)	undefined	-	0.0	-	0	+	1E-3
f(x)	undefined	↑	0.37	↓	0.33	↓	0.21

e^1

joten suurin arvo on laskimesta on

y1=ln(x)/x							
x	0		2.72		4.48		11.7
f'(x)	undefined	+	0	-	0.0	-	0.0
f''(x)	undefined	-	0.0	-	0	+	1E-3
f(x)	undefined	↑	0.37	↓	0.33	↓	0.21

e^(-1)

e^{-1} .

6. Ringettejoukkueen kolmen hyökkääjän todennäköisyydet tehdä maali rangaistuslaukauksella ovat 65 %, 75 % ja 54 %. Kukin kolmesta hyökkääjästä saa yhden yrityksen.
- Millä todennäköisyydellä ainakin yksi hyökkääjä tekee maalin?
 - Laske rangaistuslaukausmaalien lukumäärän odotusarvo.

Ratkaisu: Komplementin kautta kysytty todennäköisyys on $1 - P(\text{"Kukaan hyökkääjästä ei tee maalia"})$. Tämä arvo laskimesta

$$1 - ((1 - 0.65)(1 - 0.75)(1 - 0.54)) = \frac{3839}{4000}$$

Satunnaismuuttujan $X = \text{"maalien lukumäärä"}$ arvojoukko on $\{0, 1, 2, 3\}$. Vastaavat pistetodennäköisyydet ovat laskimesta (tarkistuksineen)

$0.65 \Rightarrow p$	$\frac{13}{20}$
$0.75 \Rightarrow q$	$\frac{3}{4}$
$0.54 \Rightarrow r$	$\frac{27}{50}$
$p(1-q)(1-r) + (1-p)q(1-r) + (1-p)(1-q)r$	$\frac{971}{4000}$
$p*q(1-r) + p(1-q)*r + (1-p)*q*r$	$\frac{363}{800}$
$p*q*r$	$\frac{1053}{4000}$
$(1-p)(1-q)(1-r)$	$\frac{161}{4000}$
$\frac{971}{4000} + \frac{363}{800} + \frac{1053}{4000} + \frac{161}{4000}$	1

Täten, odotusarvo on laskimen mukaan

$$0 * \frac{161}{4000} + 1 * \frac{971}{4000} + 2 * \frac{363}{800} + 3 * \frac{1053}{4000} = \frac{97}{50}$$

7. Olkoon $t > 0$. Paraabeli $y = ax^2 + bx + c$ kulkee pisteen $\left(0, \frac{1}{t}\right)$ kautta ja sivuaa x -akselia pisteessä $(t, 0)$.
- Määritä kertoimet a , b ja c parametrin t avulla lausuttuna.
 - Näytä, että paraabelin ja koordinaattiakselien rajoittaman alueen pinta-ala ei riipu parametrin t arvosta.

Ratkaisu: Laskimen avulla yhtälöryhmän ratkaisu ehdoista $y(0) = 1/t$, $y(t) = 0$ ja $y'(t) = 0$ on

The calculator screen shows the following steps and results:

```

define f(x)=ax^2+bx+c
f(x)|x=0
f(x)|x=t
d/dx(f(x))|x=t
{ c=1/t, a*t^2+b*t+c=0, 2*a*t+b=0 } a,b,c
{ a=1/t^3, b=-2/t^2, c=1/t }

```

Koska $t > 0$, niin $a > 0$ ja paraabeli avautuu ylöspäin. Koska se lisäksi sivuaa x -akselia, on $y \geq 0$ ja pinta-ala jää x -akselin yläpuolelle. Pinta-ala voidaan siis laskea määrätyn integraalin arvona. Laskimen mukaan integraalin arvo on vakio, eikä siten riipu parametrin t arvosta.

The calculator screen shows the following steps and results:

```

define f(x)=1/t^3*x^2+-2/t^2*x+1/t
t
int from 0 to t of f(x)dx
1/3

```

8. Eräässä huippuyliopistossa on 5 000 opiskelijaa, joista yksi sairastuu hiihtolomalta palattuaan influenssaan. Virus alkaa levitä kampuksella, ja siihen sairastuneiden opiskelijoiden lukumäärää kuvaa funktio

$$f(t) = \frac{5000}{1 + 4999e^{-0.8t}},$$

jossa aika $t \geq 0$ lasketaan vuorokausina ensimmäisestä sairastumisesta alkaen.

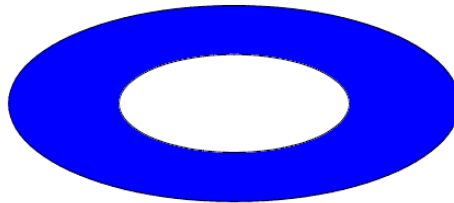
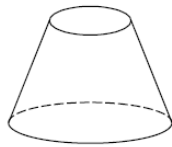
- a) Luennot peruutetaan, jos yli 50 % opiskelijoista on sairaana. Kuinka monen vuorokauden kuluttua ensimmäisestä sairastumisesta näin tapahtuu?
- b) Näytä, että $f(t)$ on kasvava funktio, kun $t > 0$.
- c) Laske $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$.

Ratkaisu: Funktio f on jatkuva ja derivoituva. Laskimesta

```
define f(t)=5000/(1+4999e^-0.8t)
done
solve(f(t)>5000/2,t)
{t>10.64624146}
define f1(t)=d/dt(f(t))
done
f1(t)
19996000*e^(4*t/5)/
(e^(4*t/5)+4999)^2
solve(f1(t)=0)
No Solution
f1(t)|t=1
1.779204354
lim(f(t))
t->oo
5000
```

Täten, a-kohdan vastaus on 11 vuorokauden kuluttua, b-kohdassa funktion derivaatalla ei ole nollakohtia $\rightarrow$ funktio on aidosti monotoninen ja koska $f'(1) > 0$, niin $f(t)$ on aidosti kasvava. C-kohdan raja-arvo on 5000.

9. Suoran ympyräkartion korkeus on 5,0 cm, ja sen pohjan säde on 2,0 cm. Kartio katkaistaan niin, että yläreunan säde on 1,0 cm. Tämän jälkeen katkaistun kartion vaippa maalataan siniseksi ja sitä pyöritetään kyljellään paperilla. Määritä näin saadun sinisen rengasalueen pinta-ala yhden neliösenttimetrin tarkkuudella.



Ratkaisu: Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan laskimella

$$\text{solve}\left(\frac{h}{1} = \frac{5}{2}, h\right) \quad \left\{ h = \frac{5}{2} \right\}$$

Nyt pyörähtäneen kappaleen ympyröiden säteet ovat Pythagoraan lausetta soveltaen laskimella

$$\begin{array}{l} \sqrt{5^2 + 2^2} \\ \sqrt{1^2 + \left(5 - \frac{5}{2}\right)^2} \end{array} \quad \begin{array}{l} \sqrt{29} \\ \frac{\sqrt{29}}{2} \end{array}$$

Ja kysytty pinta-ala laskimella

$$\pi \sqrt{29}^2 - \pi \left(\frac{\sqrt{29}}{2} \right)^2 \quad 68.32964022$$

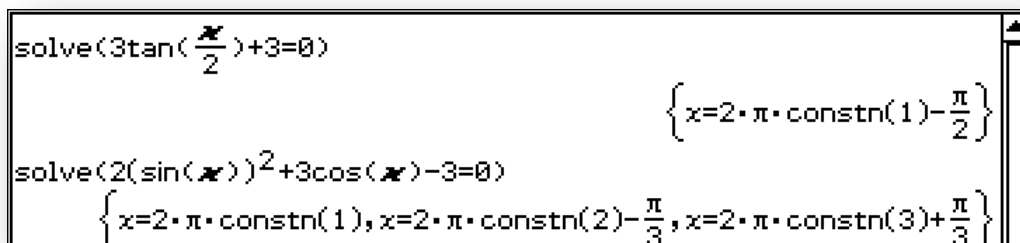
eli likimäärin 68 cm^2 .

10. Ratkaise yhtälöt

a) $3 \tan \frac{x}{2} + 3 = 0$

b) $2 \sin^2 x + 3 \cos x - 3 = 0$

Ratkaisu: Laskimella



Calculator screen showing solutions for two trigonometric equations:

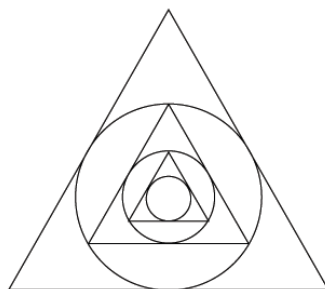
```
solve(3tan(x/2)+3=0)
```

$$\left\{ x = 2 \cdot \pi \cdot \text{constn}(1) - \frac{\pi}{2} \right\}$$

```
solve(2(sin(x))^2+3cos(x)-3=0)
```

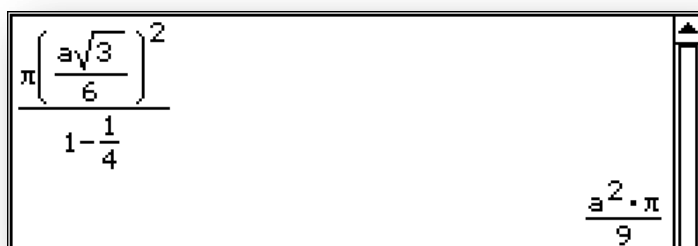
$$\left\{ x = 2 \cdot \pi \cdot \text{constn}(1), x = 2 \cdot \pi \cdot \text{constn}(2) - \frac{\pi}{3}, x = 2 \cdot \pi \cdot \text{constn}(3) + \frac{\pi}{3} \right\}$$

11. Tasasivuisen kolmion K_1 sivun pituus on a . Sen sisään asetetaan ympyrä Y_1 , joka sivuaa kolmion kylkiä. Tämän ympyrän Y_1 sisään asetetaan tasasivuinen kolmio K_2 , jonka kärjet ovat ympyrällä Y_1 . Jatkamalla näin saadaan oheisen kuvan mukainen päättymätön jono ympyröitä $Y_1, Y_2, \dots$. Laske ympyröiden pinta-alojen summa.



Ratkaisu: Tasasivuiset kolmiot ovat keskenään yhdenmuotoisia, samoin ympyrät.

Taulukkokirjasta saadaan tasasivuisen kolmion korkeus $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ ja sen sisälle ja ulkopuolelle piirrettyjen ympyröiden säteet $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ ja $\frac{1}{2} * \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Peräkkäiset ympyrät muodostavat geometrisen sarjan suhdelukuna $\frac{1}{2}$ ja niiden alat geometrisen sarjan suhdelukuna $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Laskimella



Calculator screen showing the formula for the sum of the areas of the circles:

$$\frac{\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{6} \right)^2}{1 - \frac{1}{4}}$$
$$\frac{a^2 \cdot \pi}{9}$$

12. Tuotteen hinta- ja muut tiedot voidaan tallentaa viivakoodiin (UPC = Universal Product Code). Numeerisessa muodossa viivakoodi on lukujono $(d_1, d_2, \dots, d_{12})$, jossa kukin $d_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Viimeinen luku d_{12} on tarkistusmerkki, joka määräytyy ehdosta

$$3(d_1 + d_3 + d_5 + d_7 + d_9 + d_{11}) + d_2 + d_4 + d_6 + d_8 + d_{10} + d_{12} \equiv 0 \pmod{10}.$$

- a) Tuotteen viivakoodi on $(1, 4, 2, 6, 8, 2, 5, 9, 0, 3, 2, d_{12})$. Mikä on tarkistusmerkki d_{12} ?
b) Näytä, että viivakoodi $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3)$ on virheellinen.
c) Määritä b-kohdan oikea koodi, kun tiedetään, että virhe on kolmannessa merkissä.



Esimerkki viivakoodista

<<http://en.wikipedia.org/wiki/Barcode>>. Luettu 29.3.2011.

Ratkaisu: Laskimella a-kohta

```
3(1+2+8+5+0+2)+4+6+2+9+3+d
                                d+78
solve(Mod(d+78,10)=0,d)
                                {d=-8}
```

josta päätelmä $d = -8 + 10 = 2$.

Laskimella b-kohta

```
3(1+3+5+7+9+2)+2+4+6+8+1+3
                                105
Mod(105,10)
                                5
```

josta päätelmä kymmenellä jaottomuudesta.

Laskimella c-kohta

$3(1+d+5+7+9+2)+2+4+6+8+1+3$	$3 \cdot (d+24)+24$
$\text{simplify}(3 \cdot (d+24)+24)$	$3 \cdot d+96$

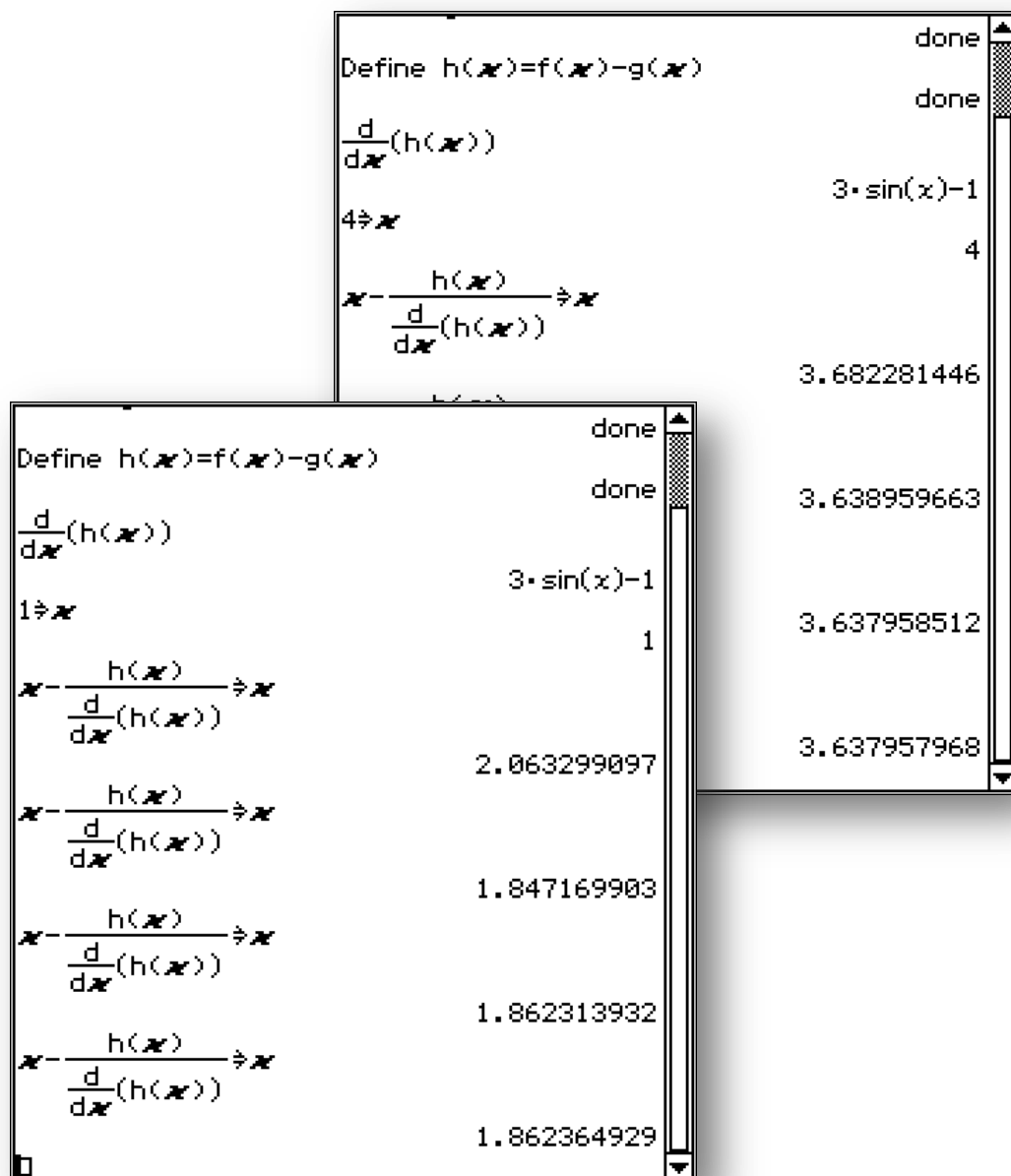
josta päätelmä $3d = 24 \Leftrightarrow d = 8$ ja oikea koodi $\{1,2,8,4,5,6,7,8,9,1,2,3\}$.

13. Funktioiden $f(x)=1-x$ ja $g(x)=3\cos x$ kuvaajilla on kolme leikkauspistettä. Laske niiden koordinaateille kaksidesimaaliset likiarvot valitsemallasi numeerisella menetelmällä.

Ratkaisu: Laskimella käyttämällä Newtonin menetelmää

Define f(x)=1-x	done
Define g(x)=3cos(x)	done
Define h(x)=f(x)-g(x)	done
$\frac{d}{dx}(h(x))$	$3 \cdot \sin(x)-1$
$0 \Rightarrow x$	0
$x - \frac{h(x)}{\frac{d}{dx}(h(x))} \Rightarrow x$	-2
$x - \frac{h(x)}{\frac{d}{dx}(h(x))} \Rightarrow x$	-0.8603639295
$x - \frac{h(x)}{\frac{d}{dx}(h(x))} \Rightarrow x$	-0.8897206491
$x - \frac{h(x)}{\frac{d}{dx}(h(x))} \Rightarrow x$	-0.8894704257

Alkuarvoa muuttamalla sadaan muut vastaukset:



Koska $f(x) = 1 - x$, on y-koordinaatti aina $1 - x$. Leikkauspisteet ovat siis $(-0,89; 1,89)$, $(1,86; -0,86)$ ja $(3,64; -2,64)$. Arvot on saatu laskimesta.

*14. Hyperbolinen kosini $\cosh x$ ja hyperbolinen sini $\sinh x$ määritellään kaavoilla

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{ja} \quad \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

kun $x \in \mathbb{R}$.

- a) Näytä, että $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. (2 p.)
- b) Näytä, että $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$. (2 p.)
- c) Näytä, että funktiolla $\sinh x$ on käänteisfunktio, ja määritä sen lauseke logaritmin avulla lausuttuna. (3 p.)
- d) Mikä on c-kohdan käänteisfunktion määrittelyjoukko? (2 p.)

Ratkaisu: Laskimella

```

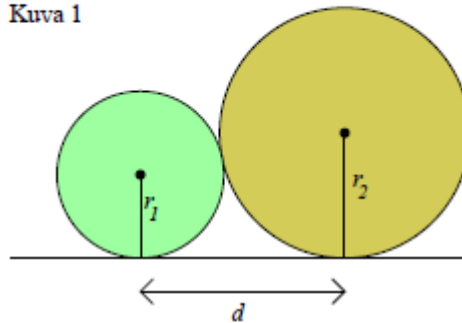
Define ch(x)=1/2*(e^x+e^-x)
done
Define sh(x)=1/2*(e^x-e^-x)
done
simplify((ch(x))^2-(sh(x))^2)
1
d/dx(sh(x))
(e^(2*x)+1)*e^-x/2
solve(d/dx(sh(x))=0)
No Solution
trigToExp(sinh^-1(x))
ln(x+sqrt(x^2+1))
solve(x+sqrt(x^2+1)>0,x)
{x=x}

```

joten a-kohdan sievennys pitää paikkansa, b-kohdan todistus samoin. C-kohdassa funktion $\sinh(x)$ derivaatalla ei ole nollakohtia ja se on kaikkialla jatkuva funktio, joten se on aidosti monotoninen ja sillä on käänteisfunktio, jonka lauseke on $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. D-kohdan määrittelyalue on $\mathbb{R}$.

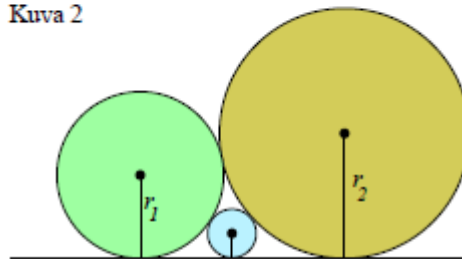
- *15. a) Kaksi ympyrää sivuaa toisiaan ja x -akselia kuvan 1 mukaisesti. Määritä ympyröiden keskipisteiden vaakasuora etäisyys d niiden säteiden avulla lausuttuna. (3 p.)

Kuva 1



- b) Kolme ympyrää sivuaa toisiaan ja x -akselia kuvan 2 mukaisesti. Määritä keskimmäisen ympyrän säde r_3 kahden reunimmaisen ympyrän säteiden avulla lausuttuna. (3 p.)

Kuva 2



- c) Todista René Descartesin (1596–1650) keksimä b-kohdan ympyröihin liittyvä kaava

$$(k_1 + k_2 + k_3)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2),$$

jossa $k_i = \frac{1}{r_i}$, $i = 1, 2, 3$. (3 p.)

Ratkaisu: Merkitään säteitä $r_1 = x$, $r_2 = y$ ja $r_3 = z$ laskun helpottamiseksi. Pythagoraan lauseella suorakulmaisesta kolmiosta saadaan laskimella

$$\text{solve}(d^2 = (x+y)^2 - (y-x)^2, d) \\ \{d = -2 \cdot \sqrt{x \cdot y}, d = 2 \cdot \sqrt{x \cdot y}\}$$

joista vain positiivinen juuri käy kolmion sivuksi ja $d = 2\sqrt{r_1 r_2}$.

Merkitään pienimmän ympyrän keskipisteen vaakasuoria etäisyyksiä piirretyistä säteistä r_1 ja r_2 ja a ja b , vastaavasti. Tällöin Pythagoraan lauseen nojalla kahdesta pienemmästä suorakulmaisesta kolmosta laskimella

$$\text{solve}(2\sqrt{xy} = \sqrt{(x+z)^2 - (x-z)^2} + \sqrt{(y+z)^2 - (y-z)^2}, z)$$

$$\left\{ z = \frac{x^2 \cdot y + x \cdot y^2 - 2 \cdot \sqrt{x^3} \cdot \sqrt{y^3}}{(x-y)^2}, z = \frac{x^2 \cdot y + x \cdot y^2 + 2 \cdot \sqrt{x^3} \cdot \sqrt{y^3}}{(x-y)^2} \right\}$$

Joista jälkimmäinen ratkaisu ei käy, koska $z < x$ ja $z < y$. Siis, $r_3 = \frac{r_1^2 r_2 + r_1 r_2^2 - 2\sqrt{r_1^3} \sqrt{r_2^3}}{(r_1 - r_2)^2}$.

c-kohdassa laskimella yhtälön vasen puoli

$$\text{expand}\left(\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2\right)$$

$$\frac{2}{x \cdot y} + \frac{2}{x \cdot z} + \frac{2}{y \cdot z} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$$

ja oikea puoli

$$\text{expand}\left(2\left[\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{z}\right)^2\right]\right)$$

$$\frac{2}{x^2} + \frac{2}{y^2} + \frac{2}{z^2}$$

ovat samat, jos ja vain jos

$$\text{solve}\left(\frac{2}{x \cdot y} + \frac{2}{x \cdot z} + \frac{2}{y \cdot z} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{2}{x^2} + \frac{2}{y^2} + \frac{2}{z^2}, z\right)$$

$$\left\{ z = \frac{x^2 \cdot y + x \cdot y^2 - 2 \cdot \sqrt{x^3} \cdot \sqrt{y^3}}{(x-y)^2}, z = \frac{x^2 \cdot y + x \cdot y^2 + 2 \cdot \sqrt{x^3} \cdot \sqrt{y^3}}{(x-y)^2} \right\}$$