

Kevään 2011 pitkän matematiikan ylioppilastehtävien ratkaisut Mathematicalla
Simo K. Kivelä / 8.7.2011

■ Tehtävä 1

■ a)

Yhtälö ratkaistaan yleensä `Solve`-funktioilla:

```
Solve[2 / x == 3 / (x - 2), x]  
{ {x -> -4} }
```

■ b)

Joissakin tapauksissa täydellisempi ratkaisu saadaan `Reduce`-funktioilla:

```
Reduce[x^2 - 2 ≤ x, x]  
-1 ≤ x ≤ 2
```

■ c)

Tässä tapauksessa `Solve` on parempi, sillä `Reduce` ottaisi huomioon mahdollisuuden, että x on kompleksinen:

```
Solve[Abs[3 / 2 x - 6] == 6, x]
```

```
Solve::ifun: Inverse functions are being used by Solve, so  
some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. >>  
{ {x -> 0}, {x -> 8} }
```

■ Tehtävä 2

■ a)

Osakkeen arvo aluksi:

```
a = 35.50  
35.5
```

Noussut arvo:

```
b = a + 12 / 100 a  
39.76
```

Laskenut arvo:

```
c = b - 10 / 100 b  
35.784
```

Nousuprosentti muutosten jälkeen:

```
100 (c - a) / a  
0.8
```

■ b)

Pisteet:

```
p1 = {-2, 1}  
{-2, 1}  
p2 = {5, -3}  
{5, -3}
```

Kulmakertoimeen poimitaan koordinaatit indeksimerkintää käyttäen:

$$k = (p1[[2]] - p2[[2]]) / (p1[[1]] - p2[[1]])$$

$$-\frac{4}{7}$$

■ c)

Laskenta kahdessa vaiheessa:

$$p = 5 \log[2] - \log[8] \text{ // Simplify}$$

$$\log[4]$$

$$E^p$$

$$4$$

■ Tehtävä 3

Määritellään aluksi funktiot:

$$f[x_] = x E^{(-x^2)}$$

$$e^{-x^2} x$$

$$g[x_] = 2 E^{(-x^2)}$$

$$2 e^{-x^2}$$

Ja sitten laskut:

■ a)

$$\text{Solve}[f[x] == g[x], x]$$

$$\{\{x \rightarrow 2\}\}$$

■ b)

$$f'[1]$$

$$-\frac{1}{e}$$

■ c)

$$\text{Integrate}[f[x], \{x, 0, 1\}]$$

$$\frac{-1 + e}{2 e}$$

■ Tehtävä 4

Määritellään funktio, poistetaan aiemmin käytetyt muuttujat a , b ja c ja määritellään polynomi:

$$f[x_] = 2^x$$

$$2^x$$

$$\text{Remove}[a, b, c]$$

$$p[x_] = a x^2 + b x + c$$

$$c + b x + a x^2$$

Muodostetaan vaatimusten mukainen yhtälöryhmä ja ratkaistaan se (/ . on sijoitusoperaattori, joka edellä olevaan lausekkeeseen sijoittaa esitetyt arvot; samalla kertaa voidaan tehdä useita sijoituksia):

$$\text{rtk} = \text{Solve}[f[x] == p[x] /. \{\{x \rightarrow 0\}, \{x \rightarrow 1\}, \{x \rightarrow 2\}\}, \{a, b, c\}]$$

$$\left\{\left\{a \rightarrow \frac{1}{2}, b \rightarrow \frac{1}{2}, c \rightarrow 1\right\}\right\}$$

Sijoitetaan arvot (yhtälön ratkaisusta ensimmäinen ja ainoa) polynomiin:

p[x] /. First[rtk]

$$1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}$$

■ Tehtävä 5

Määritellään polynomi ja ratkaistaan derivaatan nollakohdat:

p[x_] = x (x + 3) (5 - x)

$(5 - x) \times (3 + x)$

rtk = Solve[p'[x] == 0, x]

$\left\{ \left\{ x \rightarrow -\frac{5}{3} \right\}, \{x \rightarrow 3\} \right\}$

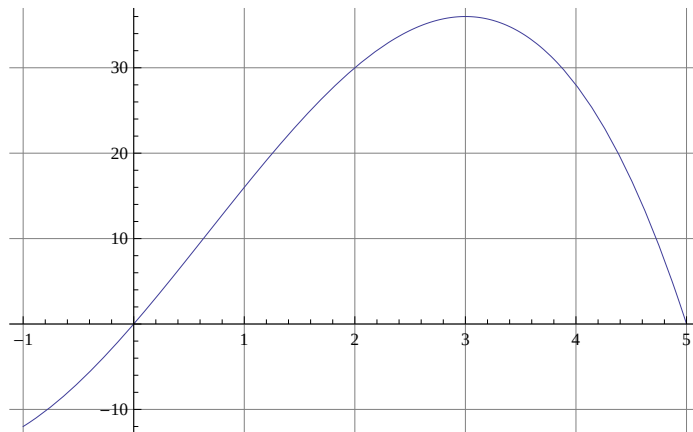
Sijoitetaan polynomiin tarkasteluväliin kuuluva nollakohta ja välin päätepisteet:

p[x] /. {rtk[[2]], {x → -1}, {x → 5}}

$\{36, -12, 0\}$

Saaduista arvoista suurin on maksimi ja pienin minimi, siis 36 ja -12. Lopuksi kuvaaja:

Plot[p[x], {x, -1, 5}, GridLines → Automatic]



■ Tehtävä 6

Lasketaan todennäköisyydet taulukkoon binomikertoimien avulla:

pr = Table[Binomial[3, k] Binomial[7, 3 - k] / Binomial[10, 3], {k, 0, 3}]

$\left\{ \frac{7}{24}, \frac{21}{40}, \frac{7}{40}, \frac{1}{120} \right\}$

Näiden summa on 1, kuten pitääkin:

Apply[Plus, pr]

1

Numeeriset arvot todennäköisyyksille:

pr // N

$\{0.291667, 0.525, 0.175, 0.00833333\}$

■ Tehtävä 7

Jos laatat asetetaan kiinni toisiinsa, muodostuu neljäkäs symmetriasyistä. Toinen sivun pituus on $a = 1$:

a = 1

1

Toinen sivun pituus olkoon x . Leijan toinen lävistäjä jakaa sen kahteen kolmioon, joissa lävistäjän vastaisena

kulmana on toisaalta 72° :n, toisaalta 144° :n kulma. Lävistäjän pituus voidaan kosinilauseetta käyttäen muodostaa kumpaankin kolmioon pohjautuen, jolloin saadaan yhtälö luvulle x . Tämä ratkaistaan:

```
rtk = Solve[a^2 + a^2 - 2 a a Cos[144 Degree] == x^2 + x^2 - 2 x x Cos[72 Degree], x]
```

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow -\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}} \right\}, \left\{ x \rightarrow \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}} \right\} \right\}$$

Sivun pituus on positiivinen ratkaisu, joka voidaan vielä sieventää:

```
b = x /. rtk[[2]] // FullSimplify
```

$$\frac{1}{2} (1 + \sqrt{5})$$

Numeerinen arvo:

```
b // N
```

1.61803

Laattojen alat sinilauseen avulla (kumpikin muodostuu kahdesta kolmiosta):

```
leijanAla = a b Sin[72 Degree] // FullSimplify
```

$$\frac{1}{2} \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

```
leijanAla // N
```

1.53884

```
nuolenAla = a b Sin[36 Degree] // FullSimplify
```

$$\sqrt{\frac{5}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}}$$

```
nuolenAla // N
```

0.951057

■ Tehtävä 8

Muodostetaan vektorit:

```
a = {4, -5, 3}
```

```
{4, -5, 3}
```

```
b = {2, 1, -2}
```

```
{2, 1, -2}
```

```
u = t b
```

```
{2 t, t, -2 t}
```

```
v = {x, y, z}
```

```
{x, y, z}
```

Muodostetaan vektoreita koskevat ehdot ja ratkaistaan näistä tuntemattomat kertoimet:

```
rtk = Solve[{a == u + v, b.v == 0}, {x, y, z, t}]
```

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{14}{3}, y \rightarrow -\frac{14}{3}, z \rightarrow \frac{7}{3}, t \rightarrow -\frac{1}{3} \right\} \right\}$$

Sijoitetaan saadut arvot vektoreihin $\mathbf{u}$ ja $\mathbf{v}$:

`{u, v} /. First[rtk]`

$$\left\{ \left\{ -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}, \left\{ \frac{14}{3}, -\frac{14}{3}, \frac{7}{3} \right\} \right\}$$

■ Tehtävä 9

Lukujonon määritelmä muodostaa differenssiyhtälön alkuehtoineen. Tämä voidaan ratkaista funktiolla `RSolve`:

`rtk = RSolve[{a[1] == 5 / 4, a[n] == -3 / 4 a[n - 1]}, a[n], n]`

$$\left\{ \left\{ a[n] \rightarrow -5 \left(-\frac{1}{4} \right)^n 3^{-1+n} \right\} \right\}$$

Rakaisun avulla voidaan määritellä lukujono eksplisiittisesti Mathematicalle (hieman tautologista!):

`a[n_] = a[n] /. First[rtk]`

$$-5 \left(-\frac{1}{4} \right)^n 3^{-1+n}$$

`a[2]`

$$-\frac{15}{16}$$

`a[100]`

$$-858\,962\,534\,553\,352\,218\,394\,101\,882\,942\,702\,121\,170\,179\,203\,335 / \\ 1\,606\,938\,044\,258\,990\,275\,541\,962\,092\,341\,162\,602\,522\,202\,993\,782\,792\,835\,301\,376$$

Sarjan summa:

`Sum[a[n], {n, 1, Infinity}]`

$$\frac{5}{7}$$

■ Tehtävä 10

Poistetaan funktion f aiempi määrittely ja määritellään funktio g :

`Remove[f]`

`g[x_] = f[x] + Sin[x]`

`f[x] + Sin[x]`

Pinta-ala saadaan integraalista:

`Integrate[Abs[f[x] - g[x]], {x, 0, 2 Pi}]`

$$4$$

■ Tehtävä 11

■ a)

Määritellään funktio paloittain:

`f[x_] = Piecewise[{{a x^2, x ≤ -1}, {x^2 / (1 + x^2), x > -1}}]`

$$\begin{cases} a x^2 & x \leq -1 \\ \frac{x^2}{1+x^2} & x > -1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

Jotta funktio olisi kaikkialla jatkuva, sen on oltava jatkuva kohdassa $x = -1$ (muualla jatkuvuus on ongelmattonta).

Vaaditaan, että vasemman- ja oikeanpuolinen raja-arvo ko. kohdassa ovat samat, jolloin saadaan arvo kertoimelle

a :

`vasen = Limit[f[x], x → -1, Direction → 1]`

a

```
oikea = Limit[f[x], x → -1, Direction → -1]
```

$$\frac{1}{2}$$

```
rtk = Solve[vasen == oikea, a]
```

$$\left\{ \left\{ a \rightarrow \frac{1}{2} \right\} \right\}$$

■ b)

Määritellään tätä a :n arvoa vastaava funktio g ja lasketaan sen derivaatta:

```
g[x_] = f[x] /. rtk[[1]]
```

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} & x \leq -1 \\ \frac{x^2}{1+x^2} & x > -1 \\ 0 & \text{True} \end{cases}$$

```
g'[x]
```

$$\begin{cases} x & x < -1 \\ -\frac{2x^3}{(1+x^2)^2} + \frac{2x}{1+x^2} & x > -1 \\ \text{Indeterminate} & \text{True} \end{cases}$$

Derivoituvuus on siis selvää muualla paitsi pisteessä $x = -1$. Erotusosamäärän toispuoliset raja-arvot tässä pisteessä:

```
dvasen = Limit[(g[-1+h] - g[-1]) / h, h → 0, Direction → 1]
```

$$-1$$

```
doikea = Limit[(g[-1+h] - g[-1]) / h, h → 0, Direction → -1]
```

$$-\frac{1}{2}$$

Nämä ovat eri suuria, joten funktio ei ole derivoituva kohdassa $x = -1$.

■ c)

Raja-arvo äärettömydessä:

```
Limit[f[x], x → Infinity]
```

$$1$$

■ Tehtävä 12

Funktio `Mod` antaa jakolaskun jakojäännöksen. Koska tämä on 0, luku on jaollinen viidellä:

```
Mod[46^78 + 89^67, 5]
```

$$0$$

■ Tehtävä 13

Funktio `Factor` jakaa polynomin kokonaislukukertoimisiin tekijöihin:

```
Factor[2 x^4 - x^3 + x^2 - x - 1]
```

$$(-1+x)(1+2x)(1+x^2)$$

■ Tehtävä 14

Muodostetaan funktiot f ja g ja niiden erotus h :

```
f[x_] = Cos[x]
```

```
Cos[x]
```

$$g[x_] = 1 - x^2 / 2$$

$$1 - \frac{x^2}{2}$$

$$h[x_] = f[x] - g[x]$$

$$-1 + \frac{x^2}{2} + \cos[x]$$

■ a) ja b)

Lasketaan funktion h ensimmäinen ja toinen derivaatta sekä h :n ja sen derivaatan arvo origossa:

$$h[0]$$

$$0$$

$$h'[x]$$

$$x - \sin[x]$$

$$h'[0]$$

$$0$$

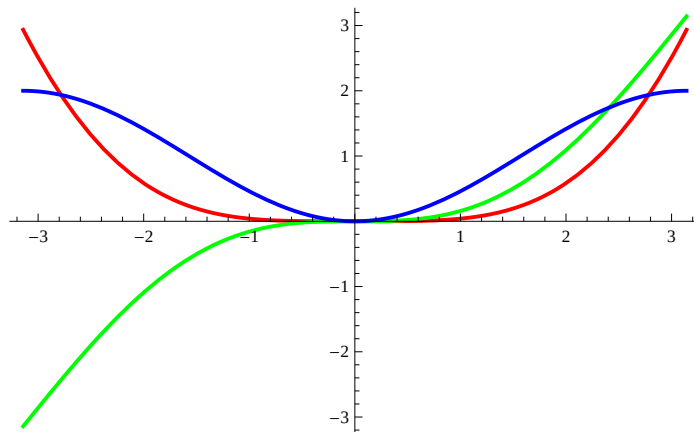
$$h''[x]$$

$$1 - \cos[x]$$

Koska $h''(x) \geq 0$ ja $= 0$ vain yksittäisissä pisteissä, h' on kasvava. Koska $h'(0) = 0$, on $h'(x) < 0$, kun $x < 0$ ja $h'(x) > 0$, kun $x > 0$. Tällöin h on vähenevä, kun $x < 0$, ja kasvava, kun $x > 0$. Koska $h(0) = 0$, on $h(x) \geq 0$ ja ainoa nollakohta on $x = 0$.

Kuvaajat (h punainen, h' vihreä, h'' sininen):

```
Plot[Tooltip[{h[x], h'[x], h''[x]}], {x, -Pi, Pi},
PlotStyle -> {{Red, Thick}, {Green, Thick}, {Blue, Thick}}]
```



■ c)

Maksimiarvo päätepisteissä:

$$\max = \{h[\pi], h[-\pi]\}$$

$$\left\{-2 + \frac{\pi^2}{2}, -2 + \frac{\pi^2}{2}\right\}$$

$$\max // N$$

$$\{2.9348, 2.9348\}$$

■ d)

Väliin jäävän alueen pinta-ala:

Integrate[h[x], {x, -Pi, Pi}]

$$\frac{1}{3} \pi (-6 + \pi^2)$$

■ Tehtävä 15

f[x_] = x^2

$$x^2$$

■ a)

Yleinen ympyrän yhtälö:

ympyra = (x - a)^2 + (y - b)^2 == r^2

$$(-a + x)^2 + (-b + y)^2 == r^2$$

Vaatus, että ympyrä kulkee pisteiden *O*, *A* ja *B* kautta:

ehdot = **Table**[ympyra /. {x → u, y → f[u]}, {u, {0, -t, t}}]

$$\{a^2 + b^2 == r^2, (-a - t)^2 + (-b + t^2)^2 == r^2, (-a + t)^2 + (-b + t^2)^2 == r^2\}$$

Ratkaistaan ehdoista kertoimet *r*, *a* ja *b* (t:n funktioina):

kertoimet = **Solve**[ehdot, {a, b, r}]

$$\left\{ \left\{ r \rightarrow \frac{1}{2} (-1 - t^2), a \rightarrow 0, b \rightarrow \frac{1}{2} (1 + t^2) \right\}, \left\{ r \rightarrow \frac{1}{2} (1 + t^2), a \rightarrow 0, b \rightarrow \frac{1}{2} (1 + t^2) \right\} \right\}$$

Valitaan positiivien *r*:

r[t_] = **r** /. **kertoimet**[[2]]

$$\frac{1}{2} (1 + t^2)$$

■ b)

Raja-ympyrän säde raja-arvona:

r0 = **Limit**[r[t], t → 0]

$$\frac{1}{2}$$

■ c)

Raja-ympyrän yhtälö:

ymp0 = **ympyra** /. **kertoimet**[[2]] /. t → 0

$$x^2 + \left(-\frac{1}{2} + y\right)^2 == \frac{1}{4}$$

Ratkaistaan tästä *y* ja valitaan se lauseke, joka antaa alapuolisen kaaren:

rtk = **Solve**[ymp0, y]

$$\left\{ \left\{ y \rightarrow \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4x^2} \right) \right\}, \left\{ y \rightarrow \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4x^2} \right) \right\} \right\}$$

g[x_] = **y** /. **rtk**[[1]]

$$\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4x^2} \right)$$

■ d)

Toiset derivaatat:

f''[0]

2

g''[0]

2

Kuvio:

Plot[{f[x], g[x]}, {x, -1, 1}]

