

6. Suorien ja tasojen geometriaa

6.1. Suorien ja tasojen yhtälöt

255.

Osoita, että yhtälöt

$$\begin{cases} x = 3 + 2\tau \\ y = -1 - 3\tau \end{cases} \text{ ja } \begin{cases} x = -1 - 6\tau \\ y = 5 + 9\tau \end{cases}$$

esittävät samaa tason suoraa.

VASTAUS: Yhteinen piste $(-1, 5)$ ja suunta $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

256.

Määritä suoran

$$\begin{cases} x = 3 + \tau \\ y = -2 \\ z = 4 - 2\tau \end{cases}$$

ja koordinaattitasojen leikkauspisteet.

VASTAUS: $(0, -2, 10)$, zx -tasolla ei ole, $(5, -2, 0)$.

257.

Määritä suorien

$$\begin{cases} x = 3 + 2\tau \\ y = -1 - 3\tau \end{cases} \text{ ja } \begin{cases} x = 1 - \sigma \\ y = 2(1 + \sigma) \end{cases}$$

leikkauspiste.

VASTAUS: $(1, 2)$.

258.

Millä luvun α arvoilla suorat

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha\tau \\ y = -\tau \end{cases} \text{ ja } x - 2y + 5 = 0$$

ovat yhdensuuntaiset?

VASTAUS: $\alpha = -2$.

259.

Määritä luku α siten, että suorat

$$2(x-1) = 1-y = 2z-3 \text{ ja } \begin{cases} x = 17 \\ y = 7 + 3\tau \\ z = 2\tau \end{cases}$$

ja vektori $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \alpha\mathbf{k}$ ovat saman tason suuntaiset.

VASTAUS: $\alpha = \frac{11}{3}$.

260.

Olkoon s_1 xy -tason suora, jonka yhtälö on $x + y - 1 = 0$ ja olkoon s_2 suora $x = -y = z = \tau$. Määritä pisteet $P_1 \in s_1$ ja $P_2 \in s_2$ siten, että vektori $\vec{P_1P_2}$ on yhdensuuntainen vektorin $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ kanssa.

VASTAUS: $P_1 \hat{=} (0, 1, 0)$, $P_2 \hat{=} (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

261.

Kolmion kaksi kärkeä ovat origo ja piste $(2, 2, -1)$. Yksi sivu on suoralla $x = 2y = z$. Määritä kolmas kärki, kun kolmannen sivun tiedetään olevan $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \alpha\mathbf{k}$, missä α on eräs luku. Mikä luku α on?

VASTAUS: $(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3})$, $\alpha = \frac{11}{2}$.

262.

Suora s kulkee pisteen $(-1, 1, 3)$ ja sen janan keskipisteen kautta, jonka zx - ja xy -tasot leikkaavat suorasta $x - 1 = 2(y + 1) = z + 3$. Määritä suoran s suuntavektori.

VASTAUS: $18\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 14\mathbf{k}$.

263.

Määritä α siten, että suorat $2(x - 1) = y + 1 = 2\alpha(z - 1)$ ja $x + 1 = y - 1 = z$ leikkaavat.

VASTAUS: $\alpha = \frac{4}{3}$.

264.

Tason koordinaatistosta $\{O, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ tiedetään, että $|\mathbf{b}_1| : |\mathbf{b}_2| = \alpha$. Tämän koordinaatiston pisteen $(1, 1)$ kautta kulkeva suora leikkaa koordinaattiakselit (so. origon kautta kulkevat kantavektoreiden suuntaiset suorat) pisteissä A ja B siten, että $|\vec{OA}| = |\vec{OB}|$. Missä pisteessä tämä suora leikkaa suoran $\xi - \eta + 3 = 0$ (so. suoran, jonka pisteiden koordinaatit (ξ, η) toteuttavat em. yhtälön)? Piirrä kuvio tapauksessa $\mathbf{b}_1 = \mathbf{i}$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$.

VASTAUS: Pisteen $(1, 1)$ kautta kulkevia suoria on (enintään) kolme, joista ensimmäinen leikkaa annetun suoran pisteessä $(\frac{\alpha+2}{\alpha-1}, \frac{4\alpha-1}{\alpha-1})$, toinen pisteessä $(\frac{\alpha-2}{\alpha+1}, \frac{4\alpha+1}{\alpha+1})$ ja kolmas on annetun suoran suuntainen.

265.

Taso kulkee pisteiden $(0, 2, 1)$ ja $(-3, 4, 1)$ kautta sekä on vektorin $2\mathbf{i} - \mathbf{k}$ suuntainen. Määritä tason yhtälö parametrimuodossa.

VASTAUS: $x = -3\sigma + 2\tau$, $y = 2 + 2\sigma$, $z = 1 - \tau$.

266.

Tason parametrimuotoinen yhtälö on

$$\begin{cases} x = 2 + 2\sigma + \tau \\ y = -1 + 3\sigma + 2\tau \\ z = 3 - \sigma + \tau \end{cases} .$$

Esitä yhtälö muodossa $ax + by + cz = d$. Mikä on tason normaalivektori?

VASTAUS: $5x - 3y + z = 16$; normaalivektori $5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

267.

Osoita, että piste $P \hat{=} 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ sijaitsee tasossa, joka kulkee pisteen $P_0 \hat{=} \mathbf{i} - 13\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ kautta ja on vektoreiden $\mathbf{s} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ ja $\mathbf{t} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ suuntainen.

VASTAUS:

268.

Taso kulkee pisteiden $(1, -1, 2)$ ja $(3, 1, 2)$ kautta sekä on vektorin $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ suuntainen. Määritä tason yhtälö muodossa $ax + by + cz = d$.

VASTAUS: $x - y - z = 0$.

269.

Määritä muodossa $ax + by + cz = d$ sen tason yhtälö, joka kulkee suoran

$$\begin{cases} x = 3 + \tau \\ y = 1 - 2\tau \\ z = -2 + \tau \end{cases}$$

kautta sekä a) pisteen $(0, 2, 1)$ kautta, b) on vektorin $3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ suuntainen.

VASTAUS: a) $7x + 6y + 5z = 17$, b) $3x + 5y + 7z = 0$.

270.

Määritä tasojen $2x - y + 2z = 5$ ja $2x + 3y - 5z + 7 = 0$ yhteiset pisteet.

VASTAUS: $x = \tau$, $y = 11 - 14\tau$, $z = 8 - 8\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$.

271.

Millä arvoilla α , β , γ tasot $x + \alpha y + \beta z = 2\alpha - \gamma + 1$ ja $\alpha x + (\alpha + 2)y + \gamma z = 2\gamma + \beta$ ovat yhdensuuntaiset? Voidaanko luvut valita siten, että tasot yhtyvät?

VASTAUS: $\alpha = 2$, $\gamma = 2\beta$ tai $\alpha = -1$, $\gamma = -\beta$; tasot yhtyvät, jos $\alpha = 2$, $\beta = \frac{10}{9}$, $\gamma = \frac{20}{9}$.

272.

Määritä seuraavien tasojen yhteiset pisteet:

$$\begin{aligned} \text{a) } & x + y - z + 2 = 0, \quad 2x + y + 2z - 4 = 0, \quad x + 3z - 2 = 0, \\ \text{b) } & x + y + z - 6 = 0, \quad x + 2y - z - 2 = 0, \quad 2x - y + z - 3 = 0. \end{aligned}$$

VASTAUS: a) Ei ole, b) $(1, 2, 3)$.

273.

Olkoon annettuna kaksi suoraa parametriesityksen avulla:

$$\mathbf{r} = (1 + \tau)\mathbf{i} + (1 + 2\tau)\mathbf{j} + (1 + 3\tau)\mathbf{k} \quad \text{ja} \quad \mathbf{r} = (1 + \tau)\mathbf{i} + (-1 + \tau)\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

Esitä muodossa $ax + by + cz = d$ sen tason yhtälö, joka kulkee edellisen suoran kautta ja on jälkimmäisen suuntainen; esitä vastaavasti jälkimmäisen suoran kautta kulkeva edellisen suoran suuntainen taso.

VASTAUS:

274.

Suoran $x = 3 + 2\tau$, $y = -2 + \tau$, $z = 1 - \tau$ kautta asetetaan taso, joka on vektorin $\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ suuntainen. Esitä taso sekä parametrimuodossa että yhden yhtälön avulla. Mikä on tason normaalivektori?

VASTAUS:

275.

Johda sen tason yhtälö, joka puolittaa pisteen $P_0 \hat{=} (x_0, y_0, z_0)$ ja tason $T(x, y, z) = 0$ väliset janat.

VASTAUS: $T(x, y, z) - \frac{1}{2}T(x_0, y_0, z_0) = 0$.

276.

Olkoon $\{O, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ avaruuden E^3 koordinaatisto. Olkoon annettuna taso T ja suora s parametrimuotoisten yhtälöiden avulla:

$$\mathbf{r} = 2u\mathbf{b}_1 + v\mathbf{b}_2 + u\mathbf{b}_3, \quad \mathbf{r} = \left(1 + \frac{t}{\alpha}\right)\mathbf{b}_1 + (t-2)\mathbf{b}_2 + (2\alpha-t)\mathbf{b}_3,$$

missä u, v, t ovat parametrit ja α on vakio. Määritä α siten, että tason T ja suoran s leikkauspiste puolittaa vektorien $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ ja $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ määrittämien koordinaattitasojen suorasta s leikkaaman janan.

VASTAUS: $\alpha = \frac{1}{2}$.

277.

Koordinaatiston $\{O, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ kantavektoreista tiedetään, että $|\mathbf{b}_1| : |\mathbf{b}_2| : |\mathbf{b}_3| = 2 : 3 : 5$. Taso T kulkee pisteen $(1, 1, 1)$ kautta ja leikkaa positiiviset koordinaattiakselit pisteissä, joiden etäisyydet origosta ovat yhtä suuret. Johda em. koordinaatistossa tason T yhtälö ja määritä piste, jossa origon kautta kulkeva vektorin $2\mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2 + 5\mathbf{b}_3$ suuntainen suora leikkaa sen.

VASTAUS: $2\xi + 3\eta + 5\zeta = 10; \quad \left(\frac{10}{19}, \frac{15}{19}, \frac{25}{19}\right)$.

278.

Osoita, että pisteiden $(x_k, y_k, z_k), k = 1, 2, 3$, (jotka eivät ole samalla suoralla) kautta kulkevan tason yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

VASTAUS:

279.

Määritä suorilta

$$\begin{cases} x = 7 + 3\tau \\ y = 6 + 2\tau \\ z = 7 + 4\tau \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x = \tau \\ y = 10 - 3\tau \\ z = -17 + 5\tau \end{cases}$$

sellaiset pisteet, että niiden yhdysjana on kohtisuorassa molempia suoria vastaan. Esitä yhteisen normaalin parametrimuotoinen yhtälö.

VASTAUS: $(1, 2, -1), (3, 1, -2), \quad x = 1 + 2\tau, y = 2 - \tau, z = -1 - \tau$.

280.

Määritä pisteen $(3, 4, -2)$ kohtisuora projektiio sillä tasolla, joka kulkee pisteen $(1, 0, -1)$ kautta ja on kohtisuorassa vektoria $\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ vastaan.

VASTAUS: $\left(\frac{25}{6}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{6}\right)$.

281.

Määritä pisteen $(3, 4, -2)$ kohtisuora projektio tasolla

$$\begin{cases} x = -1 + \sigma - \tau \\ y = 1 + \tau \\ z = \sigma \end{cases}.$$

VASTAUS: $(0, 1, 1)$.

282.

Määritä ne suorat, jotka leikkaavat suorat

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

sekä muodostavat kummankin kanssa 60° kulman.

VASTAUS: Neljä ratkaisua: $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \tau)$, $y = \tau$, $z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\tau$.

283.

Määritä sen tason yhtälö, joka on suorien

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} 3x - 7y - 3z + 6 = 0 \\ 6x + y + 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

suuntainen ja yhtä etäällä näistä.

VASTAUS:

284.

Laske tasojen $2x + y - 2z - 4 = 0$ ja $3x + 6y - 2z - 12 = 0$ välisen terävän diedrikulman kosini.

VASTAUS: $\frac{16}{21}$.

285.

Määritä tasojen $x + 2y + 3z = 1$ ja $\mathbf{r} = \mathbf{i} - \sigma(\mathbf{i} - 3\mathbf{k}) - \tau(\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$ välinen (pienempi) kulma asteen tarkkuudella. Määritä jokin piste tasojen leikkaussuoralta ja suoran suuntavektori.

VASTAUS:

286.

Määritä pisteen $(3, 2, -4)$ symmetrinen piste tason $x + y - 2z + 5 = 0$ suhteen.

VASTAUS: $(-3, -4, 8)$.

287.

Määritä pisteen $(3, 2, 1)$ symmetrinen piste suoran $x - 1 = 2(1 - y) = z + 3$ suhteen.

VASTAUS: $(\frac{32}{9}, -\frac{25}{9}, -\frac{31}{9})$.

288.

Määritä origon suurin mahdollinen etäisyys pisteiden $(0, 1, 0)$ ja $(1, 0, 2)$ kautta kulkevästä tasosta. Mikä taso antaa maksimietäisyyden?

VASTAUS: $\sqrt{\frac{5}{6}}$; $x + 5y + 2z = 5$.

289.

Tarkastellaan niitä tason $x + 2y + z - 3 = 0$ pisteitä, joiden kohtisuora projektio suoralla $x + 1 = y - 1 = z$ on $(2, 4, 3)$. Määritä näistä se, joka on lähinnä origoa.

VASTAUS: $(\frac{15}{2}, -6, \frac{15}{2})$.

290.

Määritä se suoran $\mathbf{r} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \tau(-\mathbf{i} + \mathbf{k})$ tasolla $x + 2y + 2z = 0$ olevan kohtisuoran projektion piste, jonka kohtisuora projektio suoralla $x = y = z$ on origo.

VASTAUS: $(0, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3})$.

291.

Määritä suoran

$$\begin{cases} x - y + 2z + 3 = 0 \\ 2x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

xy-tasolla olevan kohtisuoran projektion ja tason $x - y - z + 1 = 0$ välisen kaltevuuskulman sini.

VASTAUS: $\frac{2}{\sqrt{102}}$.

292.

Vektorin $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ kanssa samansuuntainen valonsäde kohtaa heijastavan tason pisteessä $(1, 2, -1)$. Heijastunut säde kulkee pisteen $(2, 5, -3)$ kautta. Johda tason yhtälö.

VASTAUS: $x - 4y + 5z + 12 = 0$.

293.

Positiivisen z-akselin suunnasta tuleva valonsäde osuu pisteessä $(1, 2, 3)$ tasolla $3x + 2y + z = 10$ olevaan peiliin ja heijastuu tästä. Määritä heijastuneen säteen suunta. Kohtaako heijastunut säde xy-tasoa? Jos, niin missä pisteessä?

VASTAUS:

294.

Painovoima vaikuttakoon negatiivisen z-akselin suuntaan. Pisara putoaa pisteestä $(1, 1, 3)$ tasolle $3x - 4y + 12z = 12$ ja alkaa valua tasoa pitkin alaspäin. Missä pisteessä se kohtaa xy-tason?

VASTAUS: $(\frac{64}{25}, -\frac{27}{25}, 0)$.

295.

Määritä pisteen $(2, -3, 1)$ kohtisuora projektio suoralla

a) $\mathbf{r} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k} + \tau(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})$, b) $\begin{cases} 3x + y - 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z + 5 = 0 \end{cases}$.

VASTAUS: a) $(-\frac{2}{9}, \frac{7}{9}, -\frac{19}{9})$; b) $(\frac{9}{35}, \frac{178}{35}, \frac{3}{7})$.

296.

Laske pisteen $(2, 3, -1)$ etäisyys suorasta

$$\text{a) } \mathbf{r} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} + \tau(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}), \quad \text{b) } \begin{cases} 3x - y + z - 6 = 0 \\ x - 2y + 8 = 0 \end{cases}$$

VASTAUS: a) 3; b) $4\sqrt{\frac{13}{15}}$.

297.

Määritä suorien

$$\mathbf{r} = (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + \tau(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \quad \text{ja} \quad \begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$$

lyhin etäisyys.

VASTAUS: $\frac{12}{\sqrt{10}}$.

298.

Määritä suorien

$$\mathbf{r} = (2\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) + \tau(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \quad \text{ja} \quad \begin{cases} 3x - 2y = 12 \\ x + 2z = 6 \end{cases}$$

lyhin etäisyys ja lähinnä toisiaan olevat pisteet.

VASTAUS:

299.

Massapisteistön hitausmomentti on $J = \sum_{k=1}^n m_k d_k^2$, missä indeksi k numeroi pisteet, m_k on pisteen massa ja d_k sen kohtisuora etäisyys pyörähdyksakselista. Pisteessä $(3, 2, 1)$ on massa 5 ja pisteessä $(3, 1, 4)$ massa 17. Laske hitausmomentti, kun akselina on suora $5x = 3y = 2z$. Tarkka arvo ja likiarvo.

VASTAUS:

300.

Olkoot \mathbf{a} , \mathbf{b} ja \mathbf{c} kolme nollasta eroavaa avaruuden E^3 vektoria. Tutki, millä ehdolla pistejoukko $\{P \hat{=} \mathbf{r} \mid (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{b} = \mathbf{c}\}$ on a) tyhjä, b) suora, c) taso.

VASTAUS: a) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \neq 0 \text{ ja } \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \neq 0)$ tai $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \text{ ja } \mathbf{a} \times \mathbf{c} \neq \mathbf{o})$; b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \neq 0 \text{ ja } \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$; c) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \text{ ja } \mathbf{a} \times \mathbf{c} = \mathbf{o}$.

301.

Osoita, että tasot $2x + y + z - 1 = 0$, $x - 2y = 0$ ja $2x + y - 5z + 5 = 0$ voidaan valita uuden ortonormeeratun oikeakätisen koordinaatiston $y'z'$ -, $z'x'$ - ja $x'y'$ -tasoiksi. Johda koordinaattien muunnoskaavat, kun tiedetään, että pisteen $(x, y, z) = (1, -1, 1)$ uudet koordinaatit (x', y', z') ovat positiiviset.

$$\text{VASTAUS: } T = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{5} & \sqrt{5} & \sqrt{5} \\ \sqrt{6} & -2\sqrt{6} & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

302.

Pistejoukko

$$s = \{x \mid x = (1 \ 4 \ -2 \ 3)^T + \sigma(1 \ -4 \ 3 \ -3)^T\}$$

on avaruuden \mathbb{R}^4 hypersuora ja pistejoukko

$$T = \{x \mid x = (2 \ 3 \ -2 \ 3)^T + \tau_1(1 \ -1 \ 3 \ -3)^T + \tau_2(0 \ -2 \ 2 \ -3)^T + \tau_3(0 \ -3 \ 4 \ -3)^T\} \quad (1)$$

sen kolmiulotteisen hypertason. Laske suoran s ja tason T leikkauspiste.

VASTAUS: $(\frac{11}{6} \ \frac{2}{3} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2})^T$.

303.

Todista, että hypertasot

$$x = (1 \ 4 \ -2 \ 3)^T + \sigma_1(1 \ 0 \ 3 \ -12)^T + \sigma_2(2 \ 5 \ -4 \ 6)^T \text{ ja} \\ x = (2 \ 3 \ -2 \ 3)^T + \tau_1(1 \ -1 \ 3 \ -3)^T + \tau_2(0 \ -2 \ 2 \ 3)^T + \tau_3(0 \ -3 \ 4 \ -3)^T$$

ovat yhdensuuntaiset. (Vertaa: Milloin avaruudessa E^3 suora on tason suuntainen?)

VASTAUS:

304.

Todista, että hypersuora

$$x = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^T + \sigma(0 \ 1 \ 2 \ 3)^T$$

ei ole hypertason

$$x = (1 \ 0 \ 2 \ 0)^T + \tau_1(1 \ -2 \ -1 \ -1)^T + \tau_2(1 \ 0 \ 1 \ 1)^T$$

suuntainen. Onko näillä leikkauspisteitä?

VASTAUS: Ei ole leikkauspisteitä.

305.

Määritä dimensioltaan pienin hypertaso, joka sisältää pisteet

$$P_1 \hat{=} (1 \ 1 \ 1 \ 1)^T, \quad P_2 \hat{=} (0 \ -2 \ 2 \ -3)^T, \\ P_3 \hat{=} (0 \ 3 \ 2 \ 1)^T, \quad P_4 \hat{=} (1 \ 2 \ 3 \ 4)^T.$$

VASTAUS:

$$x = (1 \ 1 \ 1 \ 1)^T + \tau_1(-1 \ -3 \ 1 \ -4)^T + \tau_2(-1 \ 2 \ 1 \ 0)^T + \tau_3(0 \ 1 \ 2 \ 3)^T.$$

6.2. Painopistekoordinaatit

306.

Suora kulkee pisteiden $P_1 \hat{=} (2, 1, 3)$ ja $P_2 \hat{=} (-1, 2, 1)$ kautta. Tutki, ovatko pisteet $(8, -1, 5)$ ja $(-7, 4, -3)$ suoralla. Määritä myönteisessä tapauksessa painopistekoordinaatit ja päätele näistä pisteen sijainti pisteisiin P_1 ja P_2 nähden.

VASTAUS: Edellinen piste ei ole suoralla. Jälkimmäinen on; se sijaitsee janan P_1P_2 ulkopuolella, lähempänä pistettä P_2 kuin pistettä P_1 .

307.

Kolmion kärjet ovat $A \hat{=} (\alpha, 0)$, $B \hat{=} (\beta, 0)$ ja $C \hat{=} (0, \gamma)$. Johda keskijanojen parametrimuotoiset yhtälöt.

VASTAUS:

308.

Tutki, ovatko pisteet $(\alpha, -\beta)$, $(\alpha + \beta, \alpha - \beta)$ ja $(\alpha + 2\beta, 2\alpha - \beta)$ samalla suoralla.

VASTAUS: Ovat.

6.3. Suora- ja tasoparvista

309.

Määritä tason suorien

$$(1 + \sqrt{5})x - (7 - \sqrt{13})y = 1 \quad \text{ja} \quad (2 - \sqrt{3})x + (4 - \sqrt{7})y = 2$$

leikkauspisteen ja origon kautta kulkevan suoran yhtälö.

VASTAUS:

310.

Määritä suorien

$$3x - y + 1 = 0 \quad \text{ja} \quad x + 2y - 2 = 0$$

leikkauspisteen kautta kulkeva suora, joka a) kulkee pisteen $(2, -1)$ kautta, b) on vektorin $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ suuntainen.

VASTAUS: a) $x + y = 1$; b) $2x + y = 1$.

311.

Määritä tason suorien $y = 7x$ ja $x + y = 8$ leikkauspisteen kautta kulkevat suorat, joiden etäisyys origosta on 5.

VASTAUS: $3x - 4y + 25 = 0$, $4x + 3y - 25 = 0$.

312.

Kolmion sivut ovat tason suorilla $y = 0$, $3x + 4y = 12$ ja $5x = 12y$. Määritä kulmanpuolittajat, niiden leikkauspiste ja sisäänpiirretyn ympyrän säde.

VASTAUS: $x + 3y = 4$, $16x - 2y = 39$, $x = 5y$; leikkauspiste $(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$; säde $= \frac{1}{2}$.

313.

Määritä tasojen $x + y + z = 3$ ja $3x - 2y + z = 7$ leikkaussuoran sekä origon kautta kulkevan tason yhtälö.

VASTAUS:

314.

Määritä se tasojen $x + y + z = 2$ ja $x + 2y - z = 1$ leikkaussuoran kautta kulkeva taso, joka sisältää pisteen $(1, 1, 1)$.

VASTAUS: $y - 2z + 1 = 0$.

315.

Määritä tasojen $3x - 5y + z + 9 = 0$ ja $x - 3y - 5z - 1 = 0$ välisten diedrikulmien puolittajatasot.

VASTAUS: $x - y + 3z + 5 = 0$, $x - 2y - z + 2 = 0$.

316.

Määritä se tasojen $x + y + z = 2$ ja $x + 2y - z = 1$ leikkaussuoran kautta kulkeva taso, joka on suoran

$$\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x + y - 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

suuntainen.

VASTAUS: $x + 7y - 11z + 4 = 0$.

317.

Määritä luvut α ja β siten, että tasot $3x + 3y - 4z + 7 = 0$, $x + 6y + 2z - 6 = 0$ ja $x + \alpha y + \beta z = 0$ kulkevat saman suoran kautta. Esitä suoran yhtälö parametrimuodossa.

VASTAUS: $\alpha = \frac{12}{5}$, $\beta = -\frac{2}{5}$; $x = 1 - 3\tau$, $y = \tau$, $z = \frac{1}{2}(5 - 3\tau)$.

318.

Johda sen tason yhtälö, joka jakaa tasojen $x - 2y + z = 2$ ja $3x - 6y + 3z = 17$ väliset janat suhteessa 2 : 3.

VASTAUS: $15x - 30y + 15z = 52$.

319.

Määritä tasojen $x = 2y + 3$ ja $y + z + 3 = 0$ leikkaussuoran kautta kulkeva taso, joka puolittaa ne tasojen yhdysjanat, jotka ovat suoran $2x = 2y = -z$ suuntaiset.

VASTAUS: $x - y + z = 0$.

320.

Suoran

$$\begin{cases} x = 3 + 2\tau \\ y = -2 + \tau \\ z = 1 - \tau \end{cases}$$

kautta asetetaan taso, joka on vektorin $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ suuntainen. Määritä tämän tason ja z-akselin leikkauspiste.

VASTAUS: $(0, 0, \frac{11}{3})$.

321.

Koordinaatiston $\{O, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ kantavektoreista tiedetään, että $|\mathbf{b}_1| = |\mathbf{b}_2|$. Määritä ne suoran $\mathbf{r} = (1 + \tau)\mathbf{b}_1 + (3 - \tau)\mathbf{b}_2 + (2 + \tau)\mathbf{b}_3$ kautta kulkevat tasot, jotka leikkaavat \mathbf{b}_1 - ja \mathbf{b}_2 -koordinaattiakselit yhtä etäällä origosta.

VASTAUS: Kolme ratkaisua: $5\xi + \eta - 4\zeta = 0$, $\xi + \eta - 4 = 0$, $\xi - \eta - 2\zeta + 6 = 0$.

322.

Määritä suoran

$$\begin{cases} 3x - 4y + z - 12 = 0 \\ 4x - 7y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

kautta kulkevat tasot, joiden etäisyys origosta on $4\sqrt{2}$.

VASTAUS: $x - y - 8 = 0$, $5x - 21y + 16z + 152 = 0$.