

8. Geometriset kuvaukset

8.1. Euklidiset kuvaukset

344.

Esitä muodossa $x' = Ax + b$ se avaruuden E^3 peilauskuvaukset, jonka symmetriatasona on $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 6$.

$$\text{VASTAUS: } A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad b = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 12 \\ -18 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

345.

Tason kiertokuvauksen kiertokulma on 60° (positiiviseen suuntaan) ja kierron keskipiste $(2, 3)$. Esitä kiertokuvaus muodossa $x' = Ax + b$, so. määritä matriisi A ja pystyvektori b . Laske sen neliön kuva, jonka kärkinä ovat $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ ja $(0, 1)$.

$$\text{VASTAUS: } A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 + 3\sqrt{3} \\ 3 - 2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

346.

Osoita, että kaikki paraabelit ovat yhdenmuotoisia etsimällä skaalauskuvaus, joka vie paraabelin $y = ax^2$ paraabelille $y = bx^2$.

VASTAUS:

347.

Yhtälö $x' = Ax + b$, missä

$$A = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

esittää tason euklidista kuvausta. Tutki, millainen kuvaus on kyseessä.

VASTAUS: Peilaus suorassa $2x_1 - x_2 + 1 = 0$.

348.

Kuvaus

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

kuvaa xy -tason pisteet xy -tason pisteiksi. Osoita, että kyseessä on peilauskuvaukset ja määritä sen akseli. Laske kolmion ABC kuva, kun $A \hat{=} (0, 0)$, $B \hat{=} (5, 1)$ ja $C \hat{=} (0, -2)$. Piirrä kuvio.

VASTAUS:

349.

Kolmiulotteisen avaruuden kierron akseli kulkee origon kautta ja sen suuntavektori on $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; kiertokulma on $\pi/6$ radiaania. Laske numeerisesti kiertokuvauksen matriisi.

$$\text{VASTAUS: } \begin{pmatrix} 0.8756 & -0.3818 & 0.2960 \\ 0.4200 & 0.9043 & -0.0762 \\ -0.2386 & 0.1910 & 0.9522 \end{pmatrix}.$$

350.

Yksikkösärmäisen kuution yksi kärki on origossa ja tästä lähtevät särmät positiivisilla koordinaattiakseleilla. Kuutiota kierretään toistuvasti edellisen tehtävän kierrolla. Muodosta kiertomatriisi ja laske kierrettyjen kuutioiden kärjet. Piirrä kierretyt kuutiot projisioituina xy -tasoon. Piirtäminen helpottuu, jos alkuperäisen kuution kärkien koordinaatit asetetaan $3 \times n$ -kokoisen matriisin pystyvektoreiksi sellaiseen järjestykseen, että kärjet yhdistämällä saadaan piirretyksi koko kuutio; tällöin joudutaan eräissä kärjissä käymään useampaan kertaan, jolloin matriisissa on useampia pystyvektoreita kuin kuutiossa on kärkiä. Kierrettyjen kuutioiden kärkipisteille saadaan tämän jälkeen vastaavanlaiset koordinaattimatriisit matriisitulon avulla.

VASTAUS:

351.

Kolmiulotteisen avaruuden kierron akseli kulkee origon kautta ja sen suuntavektori on $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$; kiertokulma on 0.1 radiaania. Laske kiertokuvauksen matriisi. Kierrä tämän avulla toistuvasti pistettä $(1, 0, 0)$ ja piirrä täten syntyvien pisteiden xy -tasoon otetut ortogonaaliprojektiot. Millaisella käyrällä projektiopisteet sijaitsevat?

VASTAUS:

352.

Skaalaa edellisen tehtävän kierron suuntavektori siten, että sen pituus on sama kuin kiertokulman suuruus. Muodosta täten skaalattua vektoria vastaava ristitulomatriisi N^{\times} ja laske numeerisesti $e^{N^{\times}}$ jollakin tietokoneohjelmalla. Mitä kiertoon liittyvää saat? (Kyseessä on matriisieksponenttifunktio, jonka argumentin tulee olla neliömatriisi. Tarkempi käsittely esitetään matriisilaskun oppikirjoissa.)

VASTAUS:

353.

Olko $T_{\mathbf{a}}$ ja $T_{\mathbf{b}}$ kaksi translaatiota. Osoita, että nämä kommutoivat, ts. $T_{\mathbf{a}} \circ T_{\mathbf{b}} = T_{\mathbf{b}} \circ T_{\mathbf{a}}$.

VASTAUS:

354.

Olko U_{φ} ja U_{ψ} tason E^2 kiertokuvauksia, joiden keskuksena on origo. Osoita, että nämä kommutoivat, ts. $U_{\varphi} \circ U_{\psi} = U_{\psi} \circ U_{\varphi}$. Päteekö sama kahdelle avaruuden E^3 kiertokuvaukselle, joiden keskuksena on origo?

VASTAUS:

355.

Olko $T_{\mathbf{a}}$ tason translaatio ja U_{φ} tason kiertokuvaus keskuksena origo. Osoita esimerkiksi, että välttämättä ei ole $T_{\mathbf{a}} \circ U_{\varphi} = U_{\varphi} \circ T_{\mathbf{a}}$. Millä ehdolla yhtälö on voimassa?

VASTAUS: $\mathbf{a} = \mathbf{o}$ tai $\varphi = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.

356.

Esitä analyyttisesti se tason E^2 euklidinen kuvaus, joka kuvaa kolmion ABC kolmiolle $A'B'C'$, kun $A \hat{=} (7, -1)$, $B \hat{=} (6, -1)$, $C \hat{=} (6, -3)$, $A' \hat{=} (-1, 1)$, $B' \hat{=} (-1, 2)$, $C' \hat{=} (-3, 2)$. Minne kuvautuu piste $P \hat{=} (1, 1)$?

VASTAUS: $x' = y$, $y' = 8 - x$; $P' \hat{=} (1, 7)$.

357.

Olko $P_1 \hat{=} (x_1, y_1)$ ja $P_2 \hat{=} (x_2, y_2)$ tason E^2 pisteitä, d näiden etäisyys. Esitä analyyttisesti tason euklidinen liike, joka kuvaa janan P_1P_2 janalle $\{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq d\}$. Onko tulos yksikäsitteinen?

VASTAUS: Esimerkiksi $x' = \frac{1}{d}[(x_2 - x_1)(x - x_1) + (y_2 - y_1)(y - y_1)]$, $y' = \frac{1}{d}[-(y_2 - y_1)(x - x_1) + (x_2 - x_1)(y - y_1)]$.

8.2. Yhdensuuntaisprojektio

358.

Yhdensuuntaisprojektion matriisi on

$$P = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & -6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Määritä kuvataso yhtälö ja projektiosäteen suuntavektori. Onko kyseessä ortogonaaliprojektio?

VASTAUS:

359.

Matriisi

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

esittää yhdensuuntaisprojektiota. Määritä matriisin ominaisarvot ja -vektorit. Määritä yhdensuuntaisprojektion kuvataso ja projektiosäteen suunta. Miten nämä saadaan ominaisvektoreiden avulla?

VASTAUS:

360.

Taso E^2 projisoidaan vektorin $-2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ suuntaan suoralle $x_2 = 3x_1$. Esitä kuvaus muodossa $x' = Px$, ts. määritä matriisi P . Onko tällä ominaisuus $P^2 = P$? Mitkä pisteet kuvautuvat pisteelle $(1, 3)$?

VASTAUS: $P = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$; on; suoran $\mathbf{r} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \tau(-2\mathbf{i} + \mathbf{j})$ pisteet.

361.

Dimetrinen ortogonaaliprojektio on yhdensuuntaisprojektio, jonka kuvataso on $\sqrt{7}x + y + z = 0$. Johda kaavat yhdensuuntaisprojektiokuvan laskemista varten.

VASTAUS:

362.

Laske ja piirrä edellisen tehtävän kaavoja käyttäen ruuviviivan

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + at \mathbf{k}$$

kuva dimetrisessä ortogonaaliprojektiossa. Valitse ruuviviivan nousuksi $a = 0.1$.

VASTAUS:

363.

Kokeile erilaisia ruuviviivan nousuja edellisen tehtävän ortogonaaliprojektiokuvassa. Miten nousu on valittava, jotta projektiokäyrällä olisi kärkiä? Miten tämä nousu voidaan laskea?

VASTAUS:

8.3. Affiniteetti

364.

Suorakulmion kärjet ovat $(1, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(1, 2)$. Laske suorakulmion affiininen kuva, kun affiniteetin esityksessä on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Laske suorakulmion ja sen kuvan pinta-alojen suhde. Miten tämä suhtautuu matriisiin A determinanttiin? Piirrä kuvio.

VASTAUS:

365.

Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

jolloin yhtälö $x' = Ax + b$ määrittää tason E^2 affiin kuvauksen itseensä. Määritä sen käyrän yhtälö, joksi yksikköympyrä $x_1^2 + x_2^2 = 1$ kuvautuu tässä kuvauksessa. Piirrä kuvakäyrä.

VASTAUS:

366.

Olkoon $x' = Ax + b$ affiininen kuvaus tasosta E^2 tasoon E^2 tai avaruudesta E^3 avaruuteen E^3 ; olkoon matriisi A säännöllinen (ts. käänteismatriisi on olemassa). Osoita, että kuvaus kuvaa suoran suoraksi. Missä kohden tarvitaan oletusta, että matriisi A on säännöllinen?

VASTAUS:

8.4. Keskusprojektiio

367.

Keskusprojektion kuvataso on yz -taso ja projektiokeskus sijaitsee pisteessä $(5, 0, 0)$. Muodosta kaavat keskusprojektiokuvan laskemista varten. Laske ja piirrä sen kuution perspektiivikuva (keskusprojektiokuva), jonka pisteille pätee $-3 \leq x \leq 0$, $-1 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$.

VASTAUS: $y' = -5y/(x-5)$, $z' = -5z/(x-5)$.

368.

Pisteestä $(0, 0, 5)$ katsellaan vektorin $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ suuntaan. Johda kaavat syntyvän perspektiivikuvan (keskusprojektiokuvan) laskemiseksi.

VASTAUS:

8.5. Projektiviteetti

369.

Tutki, miten projektiviteetti

$$x'_1 = \frac{3x_1 - 2x_2}{x_1 + x_2 + 5}, \quad x'_2 = \frac{4x_1 + 9x_2}{x_1 + x_2 + 5}$$

kuvaa tasoalueen $\{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$. Piirrä kuva.

VASTAUS:

370.

Tutki, millaisiksi käyriksi ympyrät kuvautuvat tason kuvauksessa

$$x'_1 = \frac{x_2 + 1}{x_1 + x_2}, \quad x'_2 = \frac{x_1 + 1}{x_1 + x_2}.$$

Tutki erityisesti ympyröitä, joiden keskipisteet ja säteet ovat seuraavat:

$$\text{a) } (2, 3), r = 2; \quad \text{b) } (-2, 0), r = 1; \quad \text{c) } (1, 1), r = \sqrt{2}; \quad \text{d) } (0, 0), r = 2.$$

Millaisia käyriä näiden kuvat ovat? Muodosta ensin kuvattavalle ympyrälle tavanomainen ympyrän parametriesitys $x_1 = a + r \cos \varphi$, $x_2 = b + r \sin \varphi$, ja laske tämän avulla kuvakäyrän parametriesitys.

VASTAUS: