

### 3. Itseisesti suppenevat sarjat

#### 3.1. Itseinen suppeneminen

#### 49.

Tutki suhdetestin avulla, suppeneeko sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3-4i)^k}{k!}.$$

VASTAUS: Osoita itseinen suppenevuus.

#### 50.

Olkoon  $a_k \neq -1$  kaikilla indekseillä  $k$ . Osoita, että jos sarja  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  suppenee itseisesti, niin myös sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1+a_k}$$

suppenee itseisesti.

VASTAUS: Sovella vertailutestiä itseisen suppenevuuden tutkimiseen.

#### 51.

Millä arvoilla  $x \in \mathbb{R}$  sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}$$

suppenee?

VASTAUS:

#### 52.

Millä arvoilla  $x \in \mathbb{R}$  sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k \tan \frac{x}{2^k}$$

suppenee?

VASTAUS:  $|x| < 2$ .

#### 53.

Todista, että sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

suppenee kaikilla  $z \in \mathbb{C}$  osoittamalla sarja ensin itseisesti suppenevaksi. Sijoita sarjaan  $z = i\pi$  ja laske sarjan osasummaa numeerisesti. Mikä on sarjan summa tällä muuttujan arvolla? Mikä tunnettu kompleksimuuttujan funktio mahtaa olla sarjan summafunktio?

VASTAUS:

### 3.2. Sarjan termien uudelleen järjestäminen

#### 54.

Osoita, että sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{\sqrt{k}}$$

suppenee, mutta ei suppene itseisesti. Sarjan termit järjestetään uudelleen siten, että sen summaksi tulee 3. Laske sarjan summa tarkkuutena 0.1. Montako sarjan termiä tähän tarvitaan?

VASTAUS:

#### 55.

Esitä jokin tapa järjestää sarjan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

termit siten, että sarja hajaantuu.

VASTAUS:

### 3.3. Cauchyn tulo

#### 56.

Osoita, että sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

suppenee ja suppenee itseisesti kaikilla  $z \in \mathbb{C}$ . Summafunktio olkoon  $E(z)$ . Osoita Cauchyn tuloa käyttäen, että  $E(z_1)E(z_2) = E(z_1 + z_2)$ . Mikä funktio  $E(z)$  itse asiassa on?

VASTAUS:

#### 57.

Muodosta sarjojen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \text{ja} \quad \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

Cauchyn tulo ja vaadi, että tämä on  $= 1$  (so. sarja, jonka nollas termi on  $= 1$  ja muut termit  $= 0$ ). Määritä termit  $b_k$ . Mitä funktioita sarjat mahtavat esittää?

VASTAUS:

#### 58.

Laske numeerisesti sarjan  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k / \sqrt{k+1}$  osasummien jonon 30 ensimmäistä termiä. Piirrä tämän jonon kuvaaja. Suppeneeko sarja? Muodosta sarjan Cauchyn tulo itsensä kanssa ja laske tämän osasummien jonosta 30 ensimmäistä termiä. Piirrä kuvaaja. Näyttääkö sarja suppenevan?

VASTAUS:

#### 59.

Olkoon

$$a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}.$$

Muodosta sarjan  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  Cauchyn tulo itsensä kanssa. Totea, että alkuperäinen sarja suppenee, mutta ei itseisesti, ja että sen Cauchyn tulo hajaantuu. Jälkimmäistä varten todista ensin epäyhtälö

$$(j+1)(k-j+1) \leq \left(\frac{k}{2} + 1\right)^2$$

ja sovela sitä Cauchyn tulon termin arvioimiseen.

VASTAUS: