Vektoriavaruus

Määritelmä. Kolmikko $(V,+,\cdot)$ on *vektoriavaruus*, jos V on epätyhjä joukko, jossa on määritelty alkioiden *summa* $X+Y$ ($+$ on funktio $V\times V \to V$) ja *skalaarimonikerta* aX ($\cdot$ on funktio $\mathbb{R}\times V \to V$, $\cdot$ jätetään usein merkitsemättä) ja lisäksi nämä operaatiot toteuttavat seuraavat ehdot:

V1. $X+Y=Y+X$ kaikilla $X,Y\in V$ (kommutatiivisuus eli vaihdantalaki),

V2. $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$ kaikilla $X,Y,Z\in V$ (assosiatiivisuus eli liitäntälaki),

V3. on olemassa sellainen $\theta\in V$, että $X+\theta=X$ kaikilla $X\in V$ (nolla-alkio),

V4. kaikilla $X\in V$ on olemassa sellainen $-X\in V$, että $X+(-X)=\theta$ (vasta-alkio),

V5. $a(X+Y)=aX+aY$ kaikilla $a\in\mathbb{R}$ ja $X,Y\in V$,

V6. $(a+b)X=aX+bX$ kaikilla $a,b\in\mathbb{R}$ ja $X\in V$,

V7. $a(bX)=(ab)X$ kaikilla $a,b\in\mathbb{R}$ ja $X\in V$,

V8. $1X=X$ kaikilla $X\in V$ (tässä luku 1 on reaaliluku yksi).

Vektoriavaruuden alkioita kutsutaan *vektoreiksi*. Samoin puhutaan myös *nollavektorista* θ ja alkion X *vastavektorista* $-X$.

Vektoriavaruudesta $(V,+,\cdot)$ voidaan lyhyesti puhua vain vektoriavaruutena V, jos vektoriavaruuden operaatiot ovat selviä asiayhteydestä.

Lause. Vektoriavaruuden nollavektori ja alkion X vastavektori $-X$ ovat yksikäsitteisiä.

Todistus. Tehdään vastaoletus, että vektoriavaruudella $(V,+,\cdot)$ on kaksi nollavektoria θ ja θ'. Tarkastellaan nollavektoreiden summaa $\theta+\theta'$. Postulaatin V3 mukaan nollavektorin lisääminen ei muuta vektoria, joten $\theta+\theta'=\theta$. Samasta syystä $\theta'+\theta=\theta'$. Toisaalta ensimmäisen postulaatin mukaan $\theta+\theta'=\theta'+\theta$, joten $\theta=\theta'$.

Oletaan, että vektorilla X on vastavektorit $-X$ ja X'. Lisäämällä yhtälön $X+X'=\theta$ molemmille puolille $-X$ saadaan vasemmasta puolesta käyttämällä postulaatteja V2, V4, V1 ja V3,

$$-X+(X+X')=(-X+X)+X'=\theta+X'=X'+\theta=X'$$

ja oikeasta puolesta postulaatin V3 nojalla $-X+\theta=-X$. Täten $X'=-X$. $\square$

Linkit:
Esimerkkejä vektoriavaruuksista
Vektoriavaruuden ominaisuuksia