Lisää lineaarisesta riippuvuudesta

Lineaarisesta riippuvuudesta on hyvä huomata seuraavat asiat:

(i) Jos joukko S on lineaarisesti riippuva ja $S \subseteq T$, niin joukko T on lineaarisesti riippuva.

(ii) Joukko, joka sisältää nollavektorin $\{\theta\}$, on lineaarisesti riippuva.

(iii) Jos joukko T on lineaarisesti riippumaton, niin samoin on sen osajoukko S.

Kohta (i) seuraa siitä, että lisäämällä joukon S vektorien muodostamaan epätriviaaliin relaatioon joukon $T \setminus S$ vektorit nollalla kerrottuina saadaan joukon T epätriviaaali relaatio. Kohta (ii) seuraa edellisestä kohdasta sillä joukko $\{\theta\}$ on lineaarisesti riippuva. Kohta (iii) todistetaan epäsuorasti. Jos lineaarisesti riippumattoman joukon T osajokko S olisi lineaarisesti riippuva, siitä seuraisi kohdan (i) nojalla ristiriita.

Tarkastellaan vielä tapausta, jossa vektoriavaruutena on $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$. Merkitään vektoreita

$$X_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}).$$

Nyt m :n vektorin lineaarinen relaatio

$$c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_mX_m = \mathbf{0}$$

voidaan esittää lineaarisena homogeenisena yhtälöryhmänä

$$\begin{cases} a_{11}c_1 & + & a_{12}c_2 & + & \cdots & + & a_{1m}c_m & = & 0 \\ a_{21}c_1 & + & a_{22}c_2 & + & \cdots & + & a_{2m}c_m & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}c_1 & + & a_{n2}c_2 & + & \cdots & + & a_{nm}c_m & = & 0. \end{cases}$$

Vektorit $X_1, \ldots, X_m$ ovat lineaarisesti riippuvia jos ja vain jos tällä yhtälöryhmällä on epätriviaali ratkaisu $(c_1, \ldots, c_m)$.

Determinanttien teoriassa todistetaan sivulla Lineaarinen riippuvuus ja homogeeniset yhtälöryhmät, että tällaisella lineaarisella homogeenisella yhtälöryhmällä on aina epätriviaali ratkaisu, kun $n < m$ eli kun yhtälöitä on vähemmän kuin tuntemattomia. Täten siis vektorit $X_1, \ldots, X_m$ ovat aina lineaarisesti riippuvia vektoriavaruudessa $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, kun $m > n$.

Linkit:

Lineaarinen riippuvuus

Lineaariset yhtälöt ja yhtälöryhmät

Lineaarinen riippuvuus ja homogeeniset yhtälöryhmät