Vektoriavaruuden kanta

Jos vektoriavaruuden $(V,+,\cdot)$ joukon V äärellinen osajoukko $\{X_1,\ldots,X_n\}$ generoi vektoriavaruuden $(V,+,\cdot)$, toisin sanoen jos

$$V = L(X_1,\ldots,X_n),$$

niin sanotaan, että $(V,+,\cdot)$ on *äärellisesti generoitu.*

Määritelmä. Vektoriavaruuden $(V,+,\cdot)$ $(V \neq \{\theta\})$ joukon V osajoukkoa $\mathcal{B} = \{X_1,\ldots,X_n\}$ sanotaan vektoriavaruuden *kannaksi*, jos

(i) $\mathcal{B}$ generoi vektoriavaruuden $(V,+,\cdot)$,

(ii) $\mathcal{B}$ on lineaarisesti riippumaton.

Nolla-avaruuden $\{\theta\}$ kannaksi sovitaan tyhjä joukko.

Lause. Joukko $\mathcal{B} = \{X_1,\ldots,X_n\}$ on vektoriavaruuden $(V,+,\cdot)$ kanta jos ja vain jos jokainen vektori $X \in V$ voidaan esittää yksikäsitteisesti vektorien $X_1,\ldots,X_n$ lineaarikombinaationa eli muodossa

$$X = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n.$$

Tätä esitystä sanotaan vektorin *kantaesitykseksi*. Alkioita $a_1,\ldots,a_n$ sanotaan vektorin X *koordinaateiksi* kannan $\mathcal{B}$ suhteen.

Todistus. Olkoon $\mathcal{B}$ vektoriavaruuden $(V,+,\cdot)$ kanta. Koska kanta generoi vektorijoukon V, voidaan jokainen joukon V vektori X lausua muodossa

$$X = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n.$$

Todistetaan vielä esityksen yksikäsitteisyys. Jos vektorilla X olisi toinen kantaesitys

$$X = b_1X_1 + \cdots + b_nX_n,$$

niin vähentämällä toinen yhtälö ensimmäisestä saadaan

$$\theta = (a_1 - b_1)X_1 + \cdots + (a_n - b_n)X_n.$$

Koska kannan vektorit $X_1,\ldots,X_n$ ovat lineaarisesti riippumattomia niin viimeiselle yhtälölle on olemassa vain triviaali ratkaisu $a_i - b_i = 0$ kaikilla $i = 1,\ldots,n$. Siis $a_i = b_i$ kaikilla $i = 1,\ldots,n$. Täten kantaesitys on yksikäsitteinen.

Oletetaan kääntäen, että kaikilla vektorijoukon V vektoreilla on yksikäsitteinen esitys vektorien $X_1,\ldots,X_n$ lineaarikombinaationa. Tämän perusteella $V = L(X_1,\ldots,X_n)$. Toiseksi pitää todistaa vielä, että vektorit ovat lineaarisesti riippumattomia. Tarkastellaan lineaarista relaatiota

$$c_1X_1 + \cdots + c_nX_n = \theta.$$

Tämä on nollavektorin esitys vektorien lineaarikombinaationa. Toisaalta myös $0\cdot X_1 + \cdots + 0\cdot X_n = \theta$, joten esityksen yksikäsitteisyyden perusteella on $c_i = 0$ kaikilla $i = 1,\ldots,n$. Joukko $\{X_1,\ldots,X_n\}$ on siis lineaarisesti riippumaton. $\square$

Linkit:

Vektoriavaruus

Aliavaruuden muodostaminen