Vektoriavaruuden kannasta

Lause. Jokaisella äärellisesti generoidulla vektoriavaruudella $(V,+,\cdot)$ on kanta. Tarkemmin, jos $V = L(X_1,\dots,X_n)$ niin joukon $\mathcal{A} = \{X_1,\dots,X_n\}$ jokin osajoukko on vektoriavaruuden kanta.

Todistus. Jos $\mathcal{A}$ on lineaarisesti riippumaton, niin se itse on kanta. Jos $\mathcal{A}$ on lineaarisesti riippuva, niin sivun Lineaarinen riippuvuus lauseen mukaan jokin joukon $\mathcal{A}$ vektoreista X_i voidaan esittää muiden joukon vektorien lineaarikombinaationa. Voidaan olettaa, että

$$X_1 = a_2X_2 + \cdots + a_nX_n.$$

Koska $V = L(X_1,\dots,X_n)$, niin sijoittamalla tähän vektorin X_1 paikalle edellä saatu lauseke huomataan, että $V = L(X_2,\dots,X_n)$.

Jos nyt $\mathcal{A}\setminus\{X_1\}$ on lineaarisesti riippumaton, on se etsitty kanta. Muussa tapauksessa voidaan toistaa edellä esitetty päättely joukkoon $\mathcal{A}\setminus\{X_1\}$ ja löytää näin pienempi osajoukko, joka generoi vektoriavaruuden $(V,+,\cdot)$. Poistamalla joukosta $\mathcal{A}$ nollavektorit ja toteuttamalla edellä esitettyä päättelyä kunnes lopulta löydetään lineaarisesti riippumaton joukon $\mathcal{A}$ osajoukko saadaan vektoriavaruuden $(V,+,\cdot)$ kanta. Jos kaikki vektorit ovat nollavektoreita, niin $V = \{\theta\}$ ja sen kanta on tyhjä joukko, joka on joukon $\mathcal{A}$ osajoukko. Muussa tapauksessa prosessi päättyy viimeistään silloin, kun jäljellä on enää yksi vektori X_i (silloin $V = L(X_i)$ ja $\{X_i\}$ on haettu kanta). $\square$

Linkit:
Vektoriavaruuden kanta

Lineaarinen riippuvuus