Vektoriavaruuden dimensiosta

Tämän sivun teoria tarjoaa apua haettaessa jollekin vektoriavaruudelle kantaa.

Oletetaan koko ajan, että $(V,+,\cdot)$ on vektoriavaruus, jonka nollavektori on θ.

Lemma. Jos joukon V osajoukko $\mathcal{A} = \{X_1,\dots,X_k\}$ on lineaarisesti riipumaton ja $X_{k+1} \notin L(X_1,\dots,X_k)$, niin joukko $\mathcal{A}' = \{X_1,\dots,X_k,X_{k+1}\}$ on lineaarisesti riippumaton.

Todistus. Tehdään vastaoletus, että joukko $\mathcal{A}'$ olisi lineaarisesti riippuva. Silloin on olemassa epätriviaalin relaation

$$c_1X_1 + \cdots + c_kX_k + c_{k+1}X_k = \theta$$

toteuttavat luvut $c_1,\dots,c_{k+1} \in \mathbb{R}$. Nyt $c_{k+1} \neq 0$, koska muuten joukko $\mathcal{A}$ olisi lineaarisesti riippuva. Yhtälöstä voidaan ratkaista X_{k+1} eli $X_{k+1} \in L(X_1,\dots,X_k)$, mikä on ristiriita. □

Lause. Jos $\dim(V,+,\cdot) = n$, niin joukko $\mathcal{B} = \{X_1,\dots,X_n\}$ on vektoriavaruuden kanta, jos

(i) $\mathcal{B}$ generoi joukon V, TAI

(ii) $\mathcal{B}$ on lineaarisesti riippumaton.

Todistus. (i) Oletetaan, että joukko $\mathcal{B}$ toteuttaa ehdon (i). Koska $\mathcal{B}$ generoi joukon V ja $\dim(V,+,\cdot) = n$, niin sivun Vektoriavaruuden kannasta lauseen mukaan joukko $\mathcal{B}$ on vektoriavaruuden kanta.

(ii) Oletetaan, että $\mathcal{B}$ on lineaarisesti riippumaton. Jos $\mathcal{B}$ ei generoi joukkoa V, niin edellisen lemman nojalla voitaisiin muodostaa lineaarisesti riippumaton joukko $\{X_1,\dots,X_n,X_{n+1}\}$. Tämä on ristiriita sivun Vektoriavaruuden dimensio ensimmäisen lauseen kanssa. □

Lause. Olkoon $\dim(V,+,\cdot) = n$. Olkoot $X_1,\dots,X_k$ lineaarisesti riippumattomia joukon V vektoreita. Silloin on olemassa sellaiset joukon V vektorit $X_{k+1},\dots,X_n$, että joukko $\{X_1,\dots,X_n\}$ on vektoriavaruuden $(V,+,\cdot)$ kanta.

Todistus. Sivun Vektoriavaruuden dimensio ensimmäisen lauseen mukaan on $k \leq n$. Jos $k = n$, niin edellisen lauseen mukaan joukko $\mathcal{A} = \{X_1,\dots,X_k\}$ on kanta.

Olkoon $k < n$. Silloin $\mathcal{A}$ ei ole vektoriavaruuden $(V,+,\cdot)$ kanta. Täten joukko $L(X_1,\dots,X_k)$ muodostaa vektoriavaruuden $(V,+,\cdot)$ aidon aliavaruuden. Valitaan tämän aliavaruuden ulkopuolelta jokin $X_{k+1} \in V$, jolloin edellisen lemman nojalla joukko $\{X_1,\dots,X_k,X_{k+1}\}$ on lineaarisesti riippumaton. Jatketaan samoin kunnes on saatu kokoon n lineaarisesti riippumatonta vektoria. Edellisen lauseen mukaan nämä muodostavat vektoriavaruuden kannan. □

Edellisen lauseen mukaan voidaan siis jokainen joukon V lineaarisesti riippumaton osajoukko *täydentää* vektoriavaruuden $(V,+,\cdot)$ kannaksi.

Linkit:
Vektoriavaruuden kanta
Vektoriavaruuden kannasta
Vektoriavaruuden dimensio