Aliavaruuden dimensio

Lause. Olkoon $(V,+,\cdot)$ äärellisulotteinen vektoriavaruus. Olkoon $(U,+,\cdot)$ vektoriavaruuden $(V,+,\cdot)$ aliavaruus. Silloin

$$\dim(U,+,\cdot) \leq \dim(V,+,\cdot).$$

Jos $(U,+,\cdot)$ on aito aliavaruus, on $\dim(U,+,\cdot) < \dim(V,+,\cdot)$.

Todistus. Merkitään $\dim(V,+,\cdot) = n$. Jokainen enemmän kuin n vektoria sisältävä joukon U osajoukko on lineaarisesti riippuva. Nimittäin tällaiset joukot ovat myös joukon V osajoukkoja ja sivun Vektoriavaruuden dimensio ensimmäisen lauseen mukaan ne ovat lineaarisesti riippuvia. Olkoon $\{X_1,\ldots,X_m\} \subseteq U$ jokin lineaarisesti riippumaton joukko, jossa on suurin mahdollinen määrä vektoreita, siis $m \leq n$. Silloin $L(X_1,\ldots,X_m) = U$, sillä muuten sivun Vektoriavaruuden dimensiosta lemman nojalla olisi joukossa U lineaarisesti riippumaton joukko, jossa olisi $m+1$ vektoria. Joukko $\{X_1,\ldots,X_m\}$ on siis aliavaruuden $(U,+,\cdot)$ kanta. Täten $\dim(U,+,\cdot) = m \leq n$.

Jos $m = n$, niin saatu aliavaruuden $(U,+,\cdot)$ kanta on myös vektoriavaruuden $(V,+,\cdot)$ kanta, siis $U = V$. Tästä seuraa, että jos aliavaruus on aito, on $m < n$. $\square$

Huomaa, että sivun Vektoriavaruuden dimensiosta viimeisen lauseen mukaan aliavaruuden kanta voidaan aina täydentää koko avaruuden kannaksi.

Tutkitaan edellisen lauseen sovelluksena vektoriavaruuden $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ aliavaruuksia. Jos $(H,+,\cdot)$ on jokin aliavaruus, niin lauseen nojalla $0 \leq \dim(H,+,\cdot) \leq 3$.

Jos $\dim(H,+,\cdot) = 0$, on $H = \{\theta\}$ siis nolla-avaruus.

Jos $\dim(H,+,\cdot) = 1$, niin joukon H muodostavat jonkin vektorin kaikki skalaarimonikerrat. Toisin sanoen H sisältää kaikki pisteet, jotka ovat jollakin origon kautta kulkevalla suoralla.

Jos $\dim(H,+,\cdot) = 2$, niin H sisältää kaikki joidenkin kahden lineaarisesti riippumattoman vektorin (u_1,v_1,w_1) ja (u_2,v_2,w_2) lineaarikombinaatiot. Tämä tarkoittaa sitä, että H sisältää kaikki sellaiset pisteet, jotka ovat jollain origon kautta kulkevalla tasolla.

Jos $\dim(H,+,\cdot) = 3$, on $H = \mathbb{R}^3$.

Linkit:
Vektoriavaruuden dimensio

Vektoriavaruuden dimensiosta