Esimerkkejä aliavaruuksista 2

Esimerkki. Mitkä seuraavista joukoista muodostavat vektoriavaruuden $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ aliavaruuden:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\}, \\ S_2 &= \{(1,x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}, \\ S_3 &= \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R},\ x+y+z=0\}, \\ S_4 &= \{(x,x^2,0) \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Olkoot $a,b \in \mathbb{R}$.

Käyttämällä aliavaruuskriteeriä (AB) voidaan tutkia muodostaako S_1 aliavaruuden. Koska $a(x,0,0)+b(y,0,0) = (ax+by,0,0) \in S_1$, on $(S_1,+,\cdot)$ aliavaruus.

Vektoriavaruuden $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ nollavektori on $\theta = (0,0,0)$. Nollavektori ei kuitenkaan kuulu joukkoon S_2. Täten $(S_2,+,\cdot)$ ei ole aliavaruus, sillä kuten sivulla Aliavaruus todetaan on vektoriavaruuden nollavektori myös sen aliavaruuden nollavektori.

Joukossa S_3 on voimassa aliavaruuskriteeri (AB) :

$$a(x_1,y_1,z_1)+b(x_2,y_2,z_2) = (ax_1+bx_2, ay_1+by_2, az_1+bz_2) \in S_3,$$

sillä $(ax_1+bx_2)+(ay_1+by_2)+(az_1+bz_2) = a(x_1+y_1+z_1)+b(x_2+y_2+z_2) = a\cdot 0+b\cdot 0 = 0$. Kolmikko $(S_3,+,\cdot)$ on siis vektoriavaruuden $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ aliavaruus.

Joukkoon S_4 kuuluu alkio $(1,1,0)$. Tämän summa itsensä kanssa on $(1,1,0)+(1,1,0) = (2,2,0)$. Alkio $(2,2,0)$ ei kuulu joukkoon S_4, joten joukon S_4 alkiot eivät toteuta aliavaruuskriteeriä (A). Täten S_4 ei muodosta aliavaruutta.

Linkit:
Aliavaruus