Determinantin perusominaisuuksien todistukset

(D1) Luku c on tekijänä jokaisessa summan $\sum \operatorname{sign}(j_1, j_2, \ldots, j_n) a_{1j_1} \cdots c a_{kj_k} \cdots a_{nj_n}$ termissä, joten se voidaan ottaa koko summalausekkeen yhteiseksi tekijäksi.

(D2) Nyt determinantin summalauseke on

$$\begin{aligned} &\sum \operatorname{sign}(j_1, \ldots, j_n) a_{1j_1} \cdots (a_{kj_k} + b_{kj_k}) \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum \operatorname{sign}(j_1, \ldots, j_n)((a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n}) + (a_{1j_1} \cdots b_{kj_k} \cdots a_{nj_n})) \\ &= \sum \operatorname{sign}(j_1, \ldots, j_n) a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n} + \sum \operatorname{sign}(j_1, \ldots, j_n) a_{1j_1} \cdots b_{kj_k} \cdots a_{nj_n}, \end{aligned}$$

mistä väite seuraa.

(D3) Väite seuraa kohdasta (i), kun $c = 0$.

(D4) Todistetaan ensin, että väite pitää paikkansa, kun matriisissa A vaihdetaan kaksi peräkkäistä vaakariviä. Vaihdetaan vaakarivit A_i ja A_{i+1}, ja olkoon D muutetun matriisin determinantti. Nyt

$$D = \sum \operatorname{sign}(j_1, \ldots, j_i, j_{i+1}, \ldots, j_n) a_{1,j_1} \cdots a_{i+1,j_i} a_{i,j_{i+1}} \cdots a_{n,j_n}.$$

Koska $\operatorname{sign}(j_1, \ldots, j_i, j_{i+1}, \ldots, j_n) = -\operatorname{sign}(j_1, \ldots, j_{i+1}, j_i, \ldots, j_n)$ ja koska tulossa tekijöiden järjestystä voidaan vaihtaa, saadaan

$$D = -\sum \operatorname{sign}(j_1, \ldots, j_{i+1}, j_i, \ldots, j_n) a_{1,j_1} \cdots a_{i,j_{i+1}} a_{i+1,j_i} \cdots a_{n,j_n}.$$

Tässä esiintyvä summa on sama kuin matriisin A determinantti, vain merkinnät j_i ja j_{i+1} ovat vaihtaneet paikkaa keskenään. Täten on saatu ensimmäinen väite.

Todistetaan nyt alkuperäinen väite. Vaihdetaan matriisissa A i :s ja j :s, $i < j$, vaakarivi keskenään. Nyt i :s vaakarivi voidaan vaihtaa j :nneksi vaakariviksi $j - i$:llä peräkkäisten vaakarivien vaihdolla. Näiden vaihtojen jälkeen alkuperäinen j :s vaakarivi on järjestyksessä $j - 1$:s vaakarivi. Se saadaan vaihdetuksi i :nneksi vaakariviksi $j - i - 1$:llä peräkkäisten vaakarivien vaihdolla. Edellä todistetun mukaisesti matriisin, jossa i :s ja j :s vaakarivi on vaihdettu, determinantti on $(-1)^{j-i-1+j-i} \det A = (-1)^{2(j-i)-1} \det A = -\det A$.

(D5) Kun vaihdetaan matriisin kaksi samaa vaakariviä, matriisi ei muutu ja siten sen determinanttikaan ei voi muuttua. Toisaalta edellisen kohdan nojalla determinantti muuttuu vastaluvukseen. Täten determinantti on nolla.

(D6) Soveltamalla kohtia (D2) ja (D1) saadaan

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ A_h + cA_k \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ A_h \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \end{vmatrix}.$$

Kohdan (D5) perusteella yhtälön viimeinen determinantti on 0. Täten saadaan väite.

Linkit:
Determinantin perusominaisuuksia