# Transponoidun matriisin determinantti

**Lause.** Olkoon $A = (a_{ij})_{n\times n}$ neliömatriisi. Silloin

$$\det(A^T) = \det A.$$

*Todistus.* Olkoon $A = (a_{ij})$ ja merkitään $A^T = (b_{ij})$, missä $b_{ij} = a_{ji}$. Determinantin määritelmän mukaan on

$$\det(A^T) = \sum \mathrm{sign}(i_1, i_2, \ldots, i_n) b_{1i_1} b_{2i_2} \cdots b_{ni_n} = \sum \mathrm{sign}(i_1, i_2, \ldots, i_n) a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

Summassa ovat mukana tarkalleen kaikki sellaiset tulot, joissa on yksi alkio matriisin $(b_{ij})$ jokaiselta vaakariviltä ja yksi jokaiselta pystyriviltä. Siis summassa ovat mukana tarkalleen kaikki samat tulot kuin matriisin $(a_{ij})$ determinantin määritelmän mukaisessa summalausekkeessa. Edellä tulon tekijät on järjestetty pystyrivien mukaiseen järjestykseen; järjestämällä tulon tekijät vaakarivien mukaiseen järjestykseen saadaan

$$\det(A^T) = \sum \mathrm{sign}(i_1, i_2, \ldots, i_n) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

Tarkastellaan summan termiä $a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} = a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$. Nyt $\mathrm{sign}(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ termille $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ voidaan laskea seuraavasti: Merkitään $(n\times n)$-taulukkoon merkki $X$ jokaiseen kohtaan $(k, j_k)$, missä $k$ käy läpi vaakarivit $(1 \le k \le n)$. Jokaiselle riville ja sarakkeelle tulee siis tarkalleen yksi merkki $X$. Kirjoitetaan jokaisella rivillä merkki $O$ niihin merkin $X$ vasemmanpuoleisiin ruutuihin, joiden yläpuolella samalla sarakkeella ei ole merkkiä $X$. Kaikkien merkkien $O$ lukumäärä on käännettyjen parien lukumäärä permutaatiossa $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$.

Termiä $a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$ tarkasteltaessa tehdään taas $(n\times n)$-taulukko, jossa merkitään $X$ :llä ruutuja $(i_k, k)$, kun $k$ käy pystyrivit, $1 \le k \le n$. Koska $a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} = a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$, on saatu taulukko sama kuin edellä. Nyt lasketaan permutaation $(i_1, \ldots, i_n)$ käännetyt parit seuraavasti. Jokaisessa sarakkeessa merkitään $O$ :lla niitä taulukon ruutuja, jotka ovat merkin $X$ yläpuolella ja joiden kanssa samalla rivillä oikealla ei ole merkkiä $X$. Merkkien $O$ lukumäärä on käännettyjen parien lukumäärä. Molemmilla tavoilla laskettaessa lasketaan tarkalleen samat taulukon ruudut, joten $\mathrm{sign}(i_1, \ldots, i_n) = \mathrm{sign}(j_1, \ldots, j_n)$. Täten on saatu väite. $\square$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $O$ | $O$ | $O$ | $X$ | |
| $O$ | $X$ | | | |
| $O$ | | $O$ | | $X$ |
| $O$ | | $X$ | | |
| $X$ | | | | |

Esimerkki $(5\times 5)$-taulukosta, jossa vaakarivien $X$-merkit muodostavat permutaation $(4,2,5,3,1)$ ja pystyrivien $X$-merkit permutaation $(5,2,4,1,3)$.

Tämän lauseen tärkeä seuraus on, että sivun Determinantin perusominaisuuksia **ominaisuudet (D1)-(D6) pitävät paikkansa, kun niissä sana vaakarivi korvataan sanalla pystyrivi.**

---

**Linkit**:
Determinantti

Determinantin perusominaisuuksia