Matriisitulon determinantti

Identiteettimatriisin I_n determinantti on selvästi 1 kaikilla arvoilla n.

Olkoot $A = (a_{ij})$ ja $B = (b_{ij})$ kaksi $(n \times n)$-matriisia.

Lause. $\det(AB) = \det A \det B$.

Todistus. Esitetään matriisi A käyttäen sen pystyrivejä: $A = (A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$. Matriisitulon määritelmän mukaan tulo AB voidaan esittää käyttäen pystyrivejä:

$$AB = (\sum_{i=1}^{n} b_{i1}A^{(i)}, \sum_{i=1}^{n} b_{i2}A^{(i)}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} b_{in}A^{(i)}).$$

Täten

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(\sum_{i=1}^{n} b_{i1}A^{(i)}, \sum_{i=1}^{n} b_{i2}A^{(i)}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} b_{in}A^{(i)}) \\ &= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n} (\det(A^{(i_1)}, \ldots, A^{(i_n)}))\end{aligned}$$

Viimeinen yhtäsuuruus seuraa determinantin ominaisuuksien (D1) ja (D2) toistuvalla käytöllä.

Jos ylläolevassa summassa $i_h = i_k$, niin determinantissa $\det(A_{i_1}, \ldots, A_{i_n})$ on kaksi samaa saraketta ja se on ominaisuuden (D5) ja sivun Transponoidun matriisin determinantti huomautuksen nojalla nolla. Täten summaan jää käsiteltäväksi vain ne summan alkiot, joissa indekseissä $i_1, i_2, \ldots, i_n$ esiintyy kukin luku $1, 2, \ldots, n$ tarkalleen yhden kerran, toisin sanoen $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ käy läpi kaikki lukujen $1, 2, \ldots, n$ permutaatiot.

Täten determinantin ominaisuuden (D4) nojalla, kun tehdään riittävän monta peräkkäistä sarakkeen vaihtoa, saadaan

$$\det(A^{(i_1)}, \ldots, A^{(i_n)}) = \pm \det(A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}).$$

Olkoon J kaikkien permutaatioiden $(j_1, \ldots j_n)$ joukko. Silloin

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in J} \pm b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n} \det(A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) \\ &= (\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in J} \pm b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n})(\det A).\end{aligned}$$

Koska yhtälö on voimassa kaikilla $(n \times n)$-matriiseilla on se voimassa myös, jos valitaan $A = I_n$. Silloin saadaan

$$\det(I_n B) = \det B = (\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in J} \pm b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n}).$$

Nyt siis $\det(AB) = \det A \det B$. $\square$

Linkit:

Determinantin perusominaisuuksia

Yksinkertaisia matriiseja

Matriisitulo

Transponoidun matriisin determinantti