Cramerin säännön todistus

Olkoon $A = (A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$ ja $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ja $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ sekä

$$x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \cdots + x_n A^{(n)} = B \qquad \text{ja} \qquad \det A \neq 0.$$

Muistetaan, että sivun Transponoidun matriisin determinantti huomautuksen perusteella ovat determinantin perusominaisuudet (D1)-(D6) voimassa vaikka niissä sana vaakarivi korvataan sanalla pystyrivi.

Kun korvataan i :s pystyrivi matriisin A determinantissa sarakkeella B, saadaan

$$\det(A^{(1)}, \dots, B, \dots, A^{(n)}) = \det(A^{(1)}, \dots, x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \cdots + x_n A^{(n)}, \dots, A^{(n)}).$$

Käyttämällä determinantin summahajotelmaa (D2) yhtälön oikeaan puoleen saadaan se muotoon

$$\det(A^{(1)}, \dots, x_1 A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) + \cdots + \det(A^{(1)}, \dots, x_i A^{(i)}, \dots, A^{(n)}) + \cdots + \det(A^{(1)}, \dots, x_n A^{(n)}, \dots, A^{(n)}).$$

Edelleen determinantin sarakkeen yhteisen tekijän siirron (D1) perusteella saadaan edellinen lauseke muotoon

$$x_1 \det(A^{(1)}, \dots, A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) + \cdots + x_i \det(A^{(1)}, \dots, A^{(i)}, \dots, A^{(n)}) + \cdots + x_n \det(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, \dots, A^{(n)}).$$

Kaikissa paitsi i :nnessä tämän summalausekkeen termin determinantissa esiintyy sama sarake kahteen kertaan. Näiden determinanttien arvo on ominaisuuden (D5) perusteella nolla ja täten edellisen summan arvo on

$$x_i \det(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = x_i \det A.$$

Siis

$$\det(A^{(1)}, \dots, B, \dots, A^{(n)}) = x_i \det A.$$

Koska $\det A \neq 0$, voidaan x_i ratkaista edellisestä yhtälöstä ja saadaan väite.

Linkit:
Cramerin sääntö
Determinantin perusominaisuuksia
Transponoidun matriisin determinantti