Homogeeninen yhtälöryhmä

Lause. Jos lineaarisen homogeenisen yhtälöryhmän

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

kertoimista muodostuvan matriisin A determinantti on nollasta eroava, on yhtälöryhmällä vain triviaali ratkaisu. Jos kyseinen determinantti on nolla, on yhtälöryhmällä myös muita ratkaisuja.

Todistus. Jos $\det A \neq 0$, niin yhtälöryhmällä on Cramerin säännön nojalla yksikäsitteinen ratkaisu. Koska yhtälöryhmällä on aina triviaali ratkaisu, ei sillä voi tässä tapauksessa olla muita ratkaisuja.

Oletetaan, että $\det A = 0$. Voidaan olettaa, että kaikki matriisin alkiot eivät ole nollia (jos kaikki kertoimet olisivat nollia, olisi selvää, että yhtälöryhmällä on epätriviaaleja ratkaisuja). On siis olemassa sellainen luku k, $1 \leq k \leq n$, että matriisilla A on ainakin yksi k-rivinen alideterminantti, joka on nollasta eroava, ja jokainen useampirivinen alideterminantti on nolla. Vaihtamalla tarvittaessa yhtälöryhmässä yhtälöiden ja tuntemattomien järjestystä saadaan

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1}$$

Nyt

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} \\ a_{r1} & \cdots & a_{rk} & a_{r,k+1} \end{vmatrix} = 0,$$

kaikilla $r = 1, 2, \ldots, n$, sillä jos $1 \leq r \leq k$, on determinantissa kaksi samaa vaakariviä, joten se on ominaisuuden (D5) mukaan nolla. Jos taas $k+1 \leq r \leq n$, on determinantti $(k+1)$-rivinen matriisin A alideterminantti ja siis oletuksen mukaan nolla. Kehitetään tämä determinantti alimman vaakarivin mukaan ja merkitään vastaavia komplementteja $D_1, D_2, \ldots D_{k+1}$ (nämä eivät riipu luvusta r). Silloin kaikilla $1 \leq r \leq n$ saadaan

$$a_{r1}D_1 + a_{r2}D_2 + \cdots + a_{r,k+1}D_{k+1} = 0.$$

Täten tarkasteltavalla yhtälöryhmällä on ratkaisu

$$x_1 = D_1,\ x_2 = D_2, \ldots, x_{k+1} = D_{k+1},\ x_{k+2} = \ldots = x_n = 0.$$

Saatu ratkaisu on epätriviaali, koska yhtälön (1) mukaan alideterminantti $D_{k+1} \neq 0$. $\square$

Linkit:
Lineaariset yhtälöt ja yhtälöryhmät

Cramerin sääntö

Determinantin perusominaisuuksia