Säännöllinen matriisi

Määritelmä. Olkoon A $(n \times n)$-matriisi. Jos on olemassa sellainen $(n \times n)$-matriisi K, että

$$AK = KA = I_n,$$

missä I_n on identiteettimatriisi, niin sanotaan, että A on *säännöllinen* (tai *kääntyvä*, englanniksi *non-singular*). Matriisia K sanotaan matriisin A *käänteismatriisiksi* ja merkitään $K = A^{-1}$.

Mikäli matriisilla A on käänteismatriisi, on se yksikäsitteinen. Todistetaan tämä vastaoletuksella, että matriisilla A olisi kaksi käänteismatriisia K ja K'. Kertomalla yhtälöä $AK = I_n$ puolittain vasemmalta matriisilla K' saadaan käyttämällä matriisitulon assosiatiivisuutta yhtälön vasemmaksi puoleksi $K'(AK) = (K'A)K = I_nK = K$ ja oikeaksi puoleksi $K'I_n = K'$. Täten $K = K'$.

Esimerkiksi diagonaalimatriisi, jonka diagonaalialkiot ovat nollasta eroavia, on säännöllinen. Sillä, jos

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}, \text{ niin } D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/d_n \end{pmatrix}.$$

Lause. Matriisi A on säännöllinen jos ja vain jos $\det(A) \neq 0$.

Todistus. Oletetaan ensin, että A on säännöllinen. Matriisitulon determinantti -sivun lauseen mukaan

$$1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}),$$

jolloin välttämättä $\det(A) \neq 0$.

Oletetaan toiseksi, että $\det(A) \neq 0$. Muodostetaan matriisi $B = (C_{ij})^T$, missä C_{ij} on matriisin A alkion a_{ij} komplementti. Merkitään $D = AB$, jolloin $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{jk}$. Jos $i = j$, niin sivun Determinantin rivikehitelmät lauseen nojalla $d_{ij} = \det(A)$. Jos $i \neq j$, niin korvaa matriisin A j :s vaakarivi i :nnellä vaakarivillä ja kehittele vastaava determinantti j :nnen vaakarivin mukaan. Tämä kehitelmä on yhtäsuuri kuin d_{ij}, koska j :nnen vaakarivin alkiot eivät ole mukana komplementeissa C_{jk} ja siksi C_{jk} pysyvät vaakarivin vaihdossa muuttumattomina. Toisaalta determinantissa d_{ij} on kaksi samaa vaakariviä ja Determinantin perusominaisuuksia sivun kohdan (D5) perusteella $d_{ij} = 0$.

Edellinen päättely menee samoin myös tulolle BA, jolloin vain operaatiot tehdään pystyriveittäin. Matriisi $D = AB = BA$ on siis diagonaalimatriisi, jonka lävistäjän alkiot ovat kaikki yhtäsuuria kuin $\det(A)$. Koska $\det(A) \neq 0$, voimme jakaa matriisin B sillä ja saamme matriisin A käänteismatriisin. $\square$

Todistuksen alkuosassa tuli lisäksi osoitettua, että säännöllisen matriisin A käänteismatriisin determinantti voidaan laskea kaavalla $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Linkit:

Matriisi
Yksinkertaisia matriiseja
Matriisitulon determinantti
Alideterminantti ja komplementti
Determinantin rivikehitelmät
Determinantin perusominaisuuksia