Ryhmä

Olkoon S joukko. Joukossa S määritellyllä *binäärioperaatiolla* (tai *laskutoimituksella*) $*$ tarkoitetaan kuvausta $S \times S \to S$. Binäärioperaatio $*$ toteuttaa siis ehdon:

$$\forall\, a, b \in S : \qquad a * b \in S.$$

Määritelmä. Olkoon G epätyhjä joukko. Paria $(G, *)$ sanotaan *ryhmäksi*, jos se toteuttaa seuraavat ehdot:

(G0) Jos $a, b \in G$, niin $a * b \in G$. Tällöin voidaan sanoa, että $*$ on joukossa G määritelty binäärioperaatio tai joukko G on *suljettu* operaation $*$ suhteen.

(G1) Kaikilla $a, b, c \in G$:
$$a * (b * c) = (a * b) * c \qquad \text{(liitäntä- eli assosiatiivilaki).}$$

(G2) On olemassa sellainen joukon G alkio e (*neutraalialkio*), että kaikilla $a \in G$:

$$a * e = e * a = a.$$

(G3) Jokaisella joukon G alkiolla on olemassa sellainen joukon G alkio a^{-1} (*käänteisalkio*), että

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$$

Jos ryhmä $(G, *)$ täyttää lisäksi seuraavan ehdon sitä sanotaan *kommutatiiviseksi ryhmäksi* tai *Abelin ryhmäksi:*

(G4) Kaikilla $a, b \in G$:
$$a * b = b * a \qquad \text{(vaihdanta- eli kommutatiivilaki).}$$

Mikäli asiayhteydestä selviää ryhmän operaatio, voidaan puhua yksinkertaisesti vain ryhmästä G (eikä siis tarvitse puhua ryhmästä $(G, *)$).

Linkit:
Esimerkkejä ryhmistä
Ryhmän perusominaisuuksia