Huomioita ryhmästä

Määritelmä. Ryhmän $(G,*)$ alkioiden lukumäärää $\sharp G$ sanotaan ryhmän *kertaluvuksi*.

Jos $\sharp G = n$, jollekin positiiviselle kokonaisluvulle n, sanotaan, että ryhmä $(G,*)$ on *äärellinen* ryhmä. Muussa tapauksessa ryhmä on *ääretön*.

Määritellään lyhennysmerkintä a^n yhden alkion usealle peräkkäiselle operaatiolle

$$a^n = \underbrace{a*a*\cdots*a}_{n \text{ kappaletta}}.$$

Merkitään $a^{-n} = (a^{-1})^n$ positiiviselle kokonaisluvulle n ja $a^0 = e$, missä e on ryhmän neutraalialkio. Osoitetaan, että tavalliset potenssin laskusäännöt pätevät tälle määrittelylle, toisin sanoen $(a^n)^m = a^{nm}$ ja $a^n * a^m = a^{n+m}$ kaikille kokonaisluvuille n ja m. Mikäli n ja m ovat ei-negatiivisia kokonaislukuja on yhtälöiden toteutuminen selvää. Oletetaan, että n ja m ovat positiivisia kokonaislukuja. Silloin $(a^{-n})^m = ((a^{-1})^n)^m = (a^{-1})^{nm} = a^{-nm}$. Soveltamalla sivun Ryhmän perusominaisuuksia lauseen kohtaa (iv) toistuvasti nähdään, että $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n = a^{-n}$. Täten $(a^n)^{-m} = ((a^n)^{-1})^m = (a^{-n})^m = a^{-nm}$. Vielä $(a^{-n})^{-m} = ((a^{-n})^{-1})^m = (a^n)^m = a^{nm}$. Toinen yhtälö negatiivisille potensseille voidaan todistaa seuraavasti: $a^{-n} * a^m = (a^{-1})^n * a^m = a^{-n+m}$. Samoin $a^n * a^{-m} = a^{n-m}$. Lopuksi $a^{-n} * a^{-m} = (a^{-1})^n * (a^{-1})^m = (a^{-1})^{n+m} = a^{-n-m}$.

Huomaa, että potenssilaskun tuttua sääntä $(ab)^n = a^n b^n$ ei voida yleistää ryhmän alkioille.

Jos G on ryhmä yhteenlaskun $+$ suhteen, niin ylläoleva merkintä a^n kirjoitetaan muotoon na.

Ryhmästä $(G,\cdot)$, jossa laskutoimitus on kertolasku, voidaan käyttää nimitystä *multiplikatiivinen ryhmä*. Vastaavasti ryhmästä $(G,+)$, jonka laskutoimitus on yhteenlasku, voidaan käyttää nimitystä *additiivinen ryhmä*.

Additiivisessa ryhmässä alkion a käänteisalkiosta $-a$ voidaan käyttää myös nimitystä *vasta-alkio*. Jos ryhmän $(G,*)$ neutraalialkio on 0, voidaan puhua *nolla-alkiosta* ja vastaavasti, jos neutraalialkio on 1, voidaan puhua *ykkösalkiosta*.

Linkit:
Ryhmä

Ryhmän perusominaisuuksia

Esimerkkejä ryhmistä 2