Esimerkkejä aliryhmistä

Esimerkki.

$$(\mathbb{Z},+) < (\mathbb{Q},+) < (\mathbb{R},+) < (\mathbb{C},+)$$
$$(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot) < (\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot) < (\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$$

Esimerkki. Pari $(\mathbb{Z},+)$ on ryhmä. Merkitään jollekin kokonaisluvulle $m > 1$,

$$m\mathbb{Z} = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Osoitetaan käyttäen aliryhmäkriteeriä, että $(m\mathbb{Z},+)$ on ryhmän $(\mathbb{Z},+)$ aliryhmä.

Selvästi joukko $m\mathbb{Z}$ on epätyhjä. Oletetaan, että $a,b \in m\mathbb{Z}$. Koska ryhmän binäärioperaatio on yhteenlasku, on käänteisalkion b^{-1} tilalla nyt vasta-alkio $-b$. Merkintää $a*b^{-1}$ vastaa siis $a+(-b) = a-b$. Nyt joillekin kokonaisluvuille k_1 ja k_2 on $a = mk_1$ ja $b = mk_2$, joten $-b = m(-k_2)$. Täten $a-b = mk_1 + m(-k_2) = m(k_1-k_2) \in m\mathbb{Z}$, koska $k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}$. Siis $(m\mathbb{Z},+) < (\mathbb{Z},+)$.

Esimerkki. Säännöllisten $(n\times n)$-matriisien joukko $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det(A) \neq 0\}$ on ryhmä matriisien kertolaskun suhteen. Näytetään, että joukon $GL_n(\mathbb{R})$ osajoukko

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$$

muodostaa aliryhmän. $SL_n(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, koska identiteettimatriisi $I_n \in SL_n(\mathbb{R})$. Olkoon $A,B \in SL_n(\mathbb{R})$. Silloin $AB^{-1} \in SL_n(\mathbb{R})$, koska $\det(AB^{-1}) = \det(A)\det(B^{-1}) = \det(A)\det(B)^{-1} = 1\cdot 1^{-1} = 1$.

Esimerkki. Olkoon $(G,*)$ mikä tahansa ryhmä ja merkitään

$$Z(G) = \{z \in G \mid z*x = x*z \;\forall\, x \in G\}.$$

Osoitetaan, että $(Z(G),*)$ on ryhmän $(G,*)$ aliryhmä. Aliryhmää $(Z(G),*)$ kutsutaan ryhmän $(G,*)$ *keskukseksi*.

Olkoon e ryhmän $(G,*)$ neutraalialkio. Koska $e*a = a = a*e$ kaikilla $a \in G$, on joukko $Z(G)$ epätyhjä. Oletetaan, että $a,b \in Z(G)$. Osoitetaan ensin, että $b^{-1} \in Z(G)$. Koska $b \in Z(G)$, on kaikilla $x \in G$, $b*x = x*b$. Operoimalla tätä yhtälöä molemmin puolin vasemmalta alkiolla b^{-1} ja käyttämällä assosiatiivisuutta nähdään, että $x = e*x = (b^{-1}*b)*x = b^{-1}*(b*x) = b^{-1}*(x*b)$. Operoimalla näin saatua yhtälöä vastaavasti oikealta puolelta saadaan $x*b^{-1} = (b^{-1}*x)*(b*b^{-1}) = b^{-1}*x$.

Koska $a, b^{-1} \in Z(G)$, saadaan käyttämällä assosiatiivisuutta, että $(a*b^{-1})*x = a*(b^{-1}*x) = a*(x*b^{-1}) = (a*x)*b^{-1} = (x*a)*b^{-1} = x*(a*b^{-1})$. Täten $a*b^{-1} \in Z(G)$.

Linkit:
Aliryhmä
Esimerkkejä ryhmistä
Esimerkkejä ryhmistä 2
Yksinkertaisia matriiseja
Matriisitulon determinantti
Säännöllinen matriisi