Huomioita aliryhmästä

Äärellisille ryhmille, siis ryhmille, joiden kertaluku on jokin äärellinen luku, voidaan aliryhmäkriteerin ehtoa hieman helpottaa ja päästä tarkasteluissa helpommalla. Tämä huomataan seuraavassa lauseessa ja sen seurauksessa.

Lause. Olkoon $(G,*)$ ryhmä ja H jokin joukon G äärellinen epätyhjä osajoukko, joka on suljettu binäärioperaation $*$ suhteen. Silloin $(H,*)$ on ryhmän $(G,*)$ aliryhmä.

Todistus. Oletus siis on, että jos $a,b \in H$, missä H on joukon G äärellinen epätyhjä osajoukko, niin $a*b \in H$. Pitää näyttää, että $a*b^{-1} \in H$, joilloin väite seuraa aliryhmäkriteerin nojalla.

Oletuksesta seuraa, että $b*b = b^2 \in H$ ja samoin siis $b^k \in H$ kaikilla $k \geq 1$. Siis, jos $a \in H$, niin $a*b^k \in H$ kaikilla $k \geq 0$. Koska joukon H kertaluku on äärellinen, voidaan olettaa, että $\sharp H = n$. Täten joukon H alkioiden $b, b^2, b^3, \ldots, b^{n+1}$ joukossa, jossa on $n+1$ alkiota, on jokin alkio kahteen kertaan. Täten $b^i = b^j$, joillekin $1 \leq i < j \leq n+1$. Oletuksen nojalla $a*b^i = a*b^j \in H$. Käyttäen ryhmän yhtälön supistussääntöä saadaan, $a*b^{-1} = a*b^{j-i-1}$. Koska $j-i-1 \geq 0$, saadaan $a*b^{-1} \in H$. $\square$

Seuraus. Olkoon $(G,*)$ äärellinen ryhmä ja $H \subseteq G$ epätyhjä osajoukko. Jos kaikilla $a,b \in H$ on $a*b \in H$, niin $(H,*)$ on ryhmän $(G,*)$ aliryhmä.

Todistetaan vielä yksi aliryhmien ominaisuus kaikille ryhmille, ei yksin äärellisille.

Lause. Olkoon I jokin lukujoukko. Jos $(H_i,*)$ on ryhmän $(G,*)$ aliryhmä kaikilla $i \in I$, niin $(\bigcap_{i\in I} H_i,*)$ on ryhmän $(G,*)$ aliryhmä.

Todistus. Koska ryhmän G neutraalialkio e kuuluu kaikkiin sen osajoukkoihin, jotka muodostavat aliryhmän, kuuluu e myös joukkoon $\bigcap_{i\in I} H_i$, joka siis on epätyhjä.

Jos $a,b \in \bigcap_{i\in I} H_i$ niin $a,b \in H_i$ kaikilla $i \in I$. Koska $(H_i,*)$ on aliryhmä kaikilla $i \in I$, niin $a*b^{-1} \in H_i$ kaikilla $i \in I$. Täten $a*b^{-1} \in \bigcap_{i\in I} H_i$. Väite seuraa aliryhmäkriteeristä. $\square$

Linkit:
Aliryhmä