Ryhmän generointi

Olkoon $(G,*)$ ryhmä ja S joukon G jokin osajoukko. Tarkastellaan ryhmän $(G,*)$ sellaisten aliryhmien $(H,*)$ parvea, joissa $S \subseteq H$. Tämä parvi on epätyhjä, koska ainakin ryhmä $(G,*)$ kuuluu siihen. Kuten sivun Huomioita aliryhmästä toisessa lauseessa todettiin on parven aliryhmien $(H,*)$ leikkaus myös aliryhmä. Tätä leikkausta kutsutaan *joukon S generoimaksi ryhmän* $(G,*)$ *aliryhmäksi* ja sitä merkitään symbolilla $(<S>,*)$, missä siis

$$<S> = \bigcap_{\substack{S\subseteq H \\ (H,*)\leq(G,*)}} H. \tag{1}$$

Joukon S alkioita sanotaan ryhmän $(<S>,*)$ *generaattoreiksi*. Jos generaattoreita on äärellisen monta, toisin sanoen $S=\{a_1,\ldots,a_k\}$, sanotaan, että ryhmä $(<S>,*)$ on *äärellisesti generoitu*, ja käytetään merkintää

$$<S> = <a_1,\ldots,a_k>.$$

Määritelmän mukaan ryhmä $(<S>,*)$ on pienin ryhmän $(G,*)$ aliryhmä, jonka alkiojoukkoon S kuuluu. Tässä pienuus on ymmärrettävä sisältyvyytenä, tämä pienin joukko sisältyy kaikkiin muihin sellaisiin mahdollisiin joukkoihin, joissa S on osajoukkona ja jotka muodostavat ryhmän $(G,*)$ aliryhmän.

Olkoon e neutraalialkio. Esimerkkinä huomaamme, että $<\emptyset> = \{e\}$, $<e> = \{e\}$ ja jos $(H,*) \leq (G,*)$, niin $<H> = H$.

Lause. Olkoon $(G,*)$ ryhmä ja $S \subseteq G$. Silloin

$$<S> = \{a_1 * a_2 * \ldots * a_m \mid m \geq 1,\ a_i \in S \text{ tai } a_i^{-1} \in S, \text{ kaikilla } 1 \leq i \leq m\}$$

tai jos $S=\emptyset$, niin $<S> = \{e\}$, missä e on ryhmän G neutraalialkio.

Todistus. Jos $S=\emptyset$, tiedetään väite todeksi. Olkoon $S\neq\emptyset$ ja merkitään

$$U = \{a_1 * a_2 * \ldots * a_m \mid m \geq 1,\ a_i \in S \text{ tai } a_i^{-1} \in S, \text{ kaikilla } 1 \leq i \leq m\}.$$

Valitsemalla tulossa $a_1 * a_2 * \ldots * a_m$ luvuksi $m=1$ nähdään, että $S \subseteq U$. Aliryhmäkriteeriä käyttämällä nähdään, että $(U,*) \leq (G,*)$. Nimittäin, jos $a_1 * a_2 * \ldots * a_m \in U$ ja $a'_1 * a'_2 * \ldots * a'_n \in U$, niin $(a_1 * a_2 * \ldots * a_m) * (a'_1 * a'_2 * \ldots * a'_n)^{-1} = a_1 * a_2 * \ldots * a_m * (a'_n)^{-1} * \ldots * (a'_2)^{-1} * (a'_1)^{-1} \in U$. Täten $<S> \subseteq U$.

Toisaalta jokainen joukko H, joka esiintyy leikkauksessa (1), sisältää kaikki joukon U alkiot. Täten $U \subseteq <S>$. Siis $<S> = U$. $\square$

Jos ryhmä $(G,*)$ on äärellinen, edellisen lauseen kaava saa yksinkertaisemman muodon äärellisiä ryhmiä koskevan aliryhmäkriteerin muunnelman perusteella:

$$<S> = \{a_1 * a_2 * \ldots * a_m \mid m \geq 0,\ a_i \in S\ \forall\, i\}.$$

Esimerkki. Ääretön ryhmä $(\mathbb{Z},+)$ on äärellisesti generoitu, sillä

$$\mathbb{Z} = \{1+1+\ldots+1 = n\cdot 1 \mid n \in \mathbb{Z}\} = <1>.$$

Linkit:
Aliryhmä

Huomioita aliryhmästä