Lagrangen lause

Lause. [Lagrangen lause] Olkoon $(G,*)$ äärellinen ryhmä ja $(H,*) \leq (G,*)$. Silloin

$$[G:H] = \frac{\sharp G}{\sharp H}.$$

Erityisesti siis äärellisen ryhmän aliryhmien kertaluku jakaa ryhmän kertaluvun.

Todistus. Olkoot h_1 ja h_2 joukon H kaksi alkiota. Jos jollekin $a \in G$ on $a * h_1 = a * h_2$, niin ryhmän yhtälön supistussäännön nojalla $h_1 = h_2$. Täten jokaisessa sivuluokassa $a * H$ on yhtä monta alkiota kuin joukossa H.

Olkoon D jokin vasempien sivuluokkien edustajisto, siis $\sharp D = [G:H]$. Koska vasemmat sivuluokat muodostavat joukon G partition saadaan

$$\sharp G = \sum_{a \in D} \sharp(a * H) = \sum_{a \in D} \sharp H = [G:H](\sharp H),$$

mistä seuraa lauseen väite. □

Lagrangen lausetta voidaan käyttää tutkittaessa, mitkä ryhmän $(G,*)$ joukon G osajoukoista voivat muodostaa aliryhmiä. Lauseen perusteella voidaan esimerkiksi sanoa, ettei joukon G aito osajoukko, jossa on enemmän kuin $\sharp G/2$ alkiota voi muodostaa aliryhmää. Lagrangen lauseen seurauksena saadaan myös seuraavat lauseet.

Lause. Olkoon $(G,*)$ äärellinen ryhmä. Kaikilla $a \in G$, $\text{ord}(a) \mid \sharp G$.

Todistus. Koska $\text{ord}(a) = \sharp < a >$ ja $(< a >, *)$ on ryhmän $(G,*)$ aliryhmä, niin väite seuraa Lagrangen lauseesta. □

Jos $a \in G$ ja $(G,*)$ on äärellinen ryhmä, niin edellisen lauseen perusteella $\sharp G = \text{ord}(a) \cdot k$, jollekin kokonaisluvulle k. Täten

$$a^{\sharp G} = a^{\text{ord}(a) \cdot k} = (a^{\text{ord}(a)})^k = e^k = e,$$

missä e on ryhmän G neutraalialkio. Tuloksena on saatu seuraava lause.

Lause. Olkoon $(G,*)$ äärellinen ryhmä ja $\sharp G = n$. Silloin $a^n = e$ kaikilla $a \in G$.

Lause. Jos ryhmän kertaluku on alkuluku, niin ryhmä on syklinen.

Todistus. Olkoon $(G,*)$ ryhmä ja $\sharp G = p$, missä p on alkuluku. Valitaan $a \in G$, $a \neq e$. Silloin Lagrangen lauseen ensimmäisen seurauslauseen mukaan $\text{ord}(a) \mid p$. Koska p on alkuluku ja toisaalta $\text{ord}(a) > 1$, on $\text{ord}(a) = p$. Täten a generoi koko ryhmän $(G,*)$. □

Lopuksi varoitus Lagrangen lausetta koskien. Sen käänteinen tulos ei yleisesti pidä paikkaansa. Toisin sanoen yleisesti, jos ryhmän kertaluku on n niin kaikille luvun n tekijöille m ei ole olemassa aliryhmää, jonka kertaluku olisi m.

Linkit:

Ryhmän perusominaisuuksia

Vasemmat sivuluokat

Sykliset ryhmät

Lagrangen lauseen sovellus lukuteoriaan