Ryhmien homomorfia

Määritelmä. Olkoot $(G,*)$ ja $(G',\bullet)$ ryhmiä. Kuvausta $f:(G,*)\to(G',\bullet)$ sanotaan *(ryhmä)homomorfismiksi*, jos se toteuttaa ehdon

$$f(a*b)=f(a)\bullet f(b)\quad \forall a,b\in G.$$

Olkoon e ryhmän $(G,*)$ neutraalialkio ja e' ryhmän $(G,\bullet)$ neutraalialkio. Ryhmähomomorfismi kuvaa neutraalialkion neutraalialkioksi ja käänteisalkiot käänteisalkioiksi. Siis, jos f on homomorfismi ja $a\in G$, niin

$$f(e)=e',\qquad f(a^{-1})=f(a)^{-1}.$$

Ensimmäinen yhtälöistä nähdään oikeaksi operoimalla yhtälöä $f(e)\bullet f(e)=f(e*e)$ molemmin puolin käänteisalkiolla $f(e)^{-1}$. Jälkimmäinen seuraa puolestaan siitä, että $f(a)\bullet f(a^{-1})=f(a*a^{-1})=f(e)=e'$ ja samoin $f(a^{-1})\bullet f(a)=e'$.

Lause. Olkoon $f:(G,*)\to(G',\bullet)$ homomorfismi. Jos $(H,*)\le(G,*)$, niin $(f(H),\bullet)\le(G',\bullet)$. *Todistus.* Koska $(H,*)$ on ryhmä, niin H on epätyhjä joukko. Täten myös $f(H)$ on epätyhjä. Olkoon $a',b'\in f(H)$. Silloin joillekin $a,b\in H$ on $a'=f(a)$ ja $b'=f(b)$. Nyt

$$a'\bullet(b')^{-1}=f(a)\bullet f(b)^{-1}=f(a*b^{-1})\in f(H),$$

joten väite seuraa aliryhmäkriteeristä. $\square$

Linkit:
Aliryhmä
Homomorfismin ydin ja kuva
Huomioita ryhmähomomorfismista
Esimerkkejä ryhmähomomorfismeista