Ryhmähomomorfismin ydin ja kuva

Määritelmä. Olkoon $f : (G,*) \to (G',\bullet)$ homomorfismi ja e' ryhmän $(G',\bullet)$ neutraalialkio. Silloin kuvauksen *ydin (kernel)*, $\ker(f)$, on joukko

$$\ker(f) = \{a \in G \mid f(a) = e'\}.$$

Kuvauksen f *kuva (image)*, $\mathrm{Im}\,(f)$, on joukko

$$\mathrm{Im}\,(f) = \{f(a) \mid a \in G\}.$$

Ryhmien homomorfia -sivun lauseen perusteella on $(\mathrm{Im}\,(f),\bullet) = (f(G),\bullet)$ ryhmän $(G',\bullet)$ aliryhmä.

Lause. Olkoon $f : (G,*) \to (G',\bullet)$ ryhmähomomorfismi. Silloin $(\ker(f),*)$ on ryhmän $(G,*)$ aliryhmä.

Todistus. Sivun Ryhmien homomorfia huomion nojalla ryhmän $(G,*)$ neutraalialkio e kuvautuu homomorfismissa f ryhmän $(G',\bullet)$ neutraalialkioksi e'. Siis $e \in \ker(f)$, joten joukko $\ker(f)$ on epätyhjä.

Oletetaan, että $a,b \in \ker(f)$. Homomorfismin ja ytimen määritelmien sekä sen tiedon, että homomorfia kuvaa käänteisalkion käänteisalkioksi, perusteella saadaan:

$$f(a*b^{-1}) = f(a)\bullet f(b^{-1}) = f(a)\bullet f(b)^{-1} = e'\bullet(e')^{-1} = e'.$$

Täten $a*b^{-1} \in \ker(f)$ ja väite seuraa aliryhmäkriteeristä. $\square$

Lause. Ryhmähomomorfismi $f : (G,*) \to (G',\bullet)$ on injektio jos ja vain jos $\ker(f) = \{e\}$, missä e on ryhmän $(G,*)$ neutraalialkio.

Todistus. Olkoon e' ryhmän $(G',\bullet)$ neutraalialkio.

Oletetaan ensin, että f on injektio. Koska homomorfismi säilyttää neutraalialkion, niin $f(e) = e'$. Jos toisaalta on olemassa jokin joukon G alkio x, jolle $f(x) = e'$, niin injektiivisyydestä seuraa, että $x = e$. Siis $\ker(f) = \{e\}$.

Oletetaan kääntäen, että $\ker(f) = \{e\}$. Olkoot $x_1,x_2 \in G$. Ehdosta $f(x_1) = f(x_2)$ seuraa, että $f(x_1)\bullet f(x_2)^{-1} = e'$. Koska homomorfismi kuvaa käänteisalkion käänteisalkioksi, saadaan $f(x_1)\bullet f(x_2^{-1}) = e'$. Homomorfian perusteella on $f(x_1*x_2^{-1}) = e'$. Oletuksesta $\ker(f) = \{e\}$ seuraa nyt, että $x_1*x_2^{-1} = e$, joten $x_1 = x_2$. Siis f on injektio. $\square$

Linkit:
Ryhmien homomorfia
Aliryhmä