Tekijäryhmä

Olkoon $(N,*) \trianglelefteq (G,*)$. Ryhmän $(N,*)$ sivuluokkien joukosta ryhmässä $(G,*)$ käytetään merkintää G/N, siis

$$G/N = \{a*N \mid a \in G\} = \{a*N \mid a \in D\},$$

missä D on jokin sivuluokkien edustajisto.

Lause. Olkoon $(N,*) \trianglelefteq (G,*)$. Joukko G/N muodostaa ryhmän seuraavasti määritellyn binäärioperaation $\cdot$ suhteen:

$$(a*N)\cdot(b*N) = (a*b)*N, \qquad \forall\, a,b \in G.$$

Todistus. Osoitetaan ensimmäiseksi, että binäärioperaatio on hyvin määritelty eli tulo $(a*N)\cdot(b*N) = (a*b)*N$ on riippumaton edustajien a,b valinnasta. Valitaan toiset sellaiset edustajat a' ja b', että $a*N = a'*N$ ja $b*N = b'*N$. Silloin $a \in a'*N$, joten on olemassa sellainen $n_1 \in N$, että $a = a'*n_1$. Vastaavasti $b \in b'*N$ ja jollekin $n_2 \in N$ on $b = b'*n_2$. Nyt pitää osoittaa, että $(a*b)*N = (a'*b')*N$. Olkoon $n \in N$. Silloin operaation $*$ assosiatiivisuuden nojalla on

$$(a*b)*n = ((a'*n_1)*(b'*n_2)*n = a'*n_1*b'*n_2*n.$$

Koska $(N,*)$ on normaali aliryhmä, niin jollekin $n_3 \in N$ on $n_1*b' = b'*n_3$. Täten

$$(a*b)*n = a'*b'*n_3*n_2*n = a'*b'*n',$$

kun $n' = n_3*n_2*n \in N$. Täten $a*b*N \subseteq a'*b'*N$. Samoin voidaan osoittaa, että $a'*b'*N \subseteq a*b*N$. Täten binäärioperaatio on hyvin määritelty ja tästä seuraa ryhmän postulaatin (G0) toteutuvuus.

Binäärioperaation $\cdot$ assosiatiivisuus seuraa ryhmän $(G,*)$ operaation assosiatiivisuudesta, sillä kaikilla $a,b,c \in G$:

$$\begin{aligned}((a*N)\cdot(b*N))\cdot(c*N) &= ((a*b)*N)\cdot(c*N) = ((a*b)*c)*N\\ &= (a*(b*c))*N = (a*N)\cdot((b*c)*N) = (a*N)\cdot((b*N)\cdot(c*N)).\end{aligned}$$

Olkoon e ryhmän $(G,*)$ neutraalialkio. Ryhmän $(G/N,\cdot)$ neutraalialkio on $e*N = N$, sillä kaikilla $a \in G$ on

$$(e*N)\cdot(a*N) = (e*a)*N = a*N = (a*e)*N = (a*N)\cdot(e*N).$$

Vastaavasti alkion $a*N$ käänteisalkio on $a^{-1}*N$, sillä

$$(a*N)\cdot(a^{-1}*N) = (a*a^{-1})*N = e*N = (a^{-1}*a)*N = (a^{-1}*N)\cdot(a*N).$$

□

Määritelmä. Olkoon $(N,*) \trianglelefteq (G,*)$. Ryhmää $(G/N,\cdot)$ sanotaan ryhmän $(G,*)$ *tekijäryhmäksi* ryhmän $(N,*)$ suhteen, kun operaatio $\cdot$ on määritelty kuten edellisessä lauseessa.

Huomaa, että $\sharp(G/N) = [G:N]$.

Linkit:
Normaali aliryhmä
Vasemmat sivuluokat