Esimerkkejä normaaleista aliryhmistä ja tekijäryhmistä

Esimerkki. Säännöllisten $(n\times n)$-matriisien joukko $GL_n(\mathbb{R})=\{A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\mid \det(A)\neq 0\}$ on ryhmä matriisien kertolaskun suhteen. Joukon $GL_n(\mathbb{R})$ osajoukko $SL_n(\mathbb{R})=\{A\in GL_n(\mathbb{R})\mid \det(A)=1\}$ muodostaa tämän aliryhmän. Näytetään, että tämä aliryhmä on normaali.

Kaikilla $A\in GL_n(\mathbb{R})$ ja $B\in SL_n(\mathbb{R})$ on

$$\det(ABA^{-1})=\det(A)\det(B)\det(A^{-1})=\det(A)\det(A)^{-1}\det(B)=\det(B)=1,$$

joten $ABA^{-1}\in SL_n(\mathbb{R})$. Aliryhmien normaalisuuskriteerin mukaan $SL_n(\mathbb{R})$ on normaali aliryhmä matriisien kertolaskun suhteen.

Esimerkki. Merkitään $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ja $H=<-1>=\{\pm 1\}$. Silloin $(H,\cdot)$ on ryhmän $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ aliryhmä. Koska $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ on Abelin ryhmä, on $(H,\cdot)$ normaali. Ryhmän $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ tekijäryhmä aliryhmän $(H,\cdot)$ suhteen on

$$R^*/H=\{aH\mid a\in\mathbb{R}^*\}=\{aH\mid a\in\mathbb{R}, a>0\}$$

varustettuna binäärioperaatiolla $aH\cdot bH=abH$ kaikilla positiivisilla reaaliluvuilla a ja b.

Esimerkki. Abelin ryhmän $(\mathbb{Z},+)$ normaali aliryhmä on $(<m>,+)=(\mathbb{Z}_m,+)$, kun $m\geq 1$. Ryhmän $(\mathbb{Z},+)$ tekijäryhmän tämän aliryhmän suhteen muodostaa

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}=\{k+m\mathbb{Z}\mid k\in\mathbb{Z}\}=\{k+m\mathbb{Z}\mid k=0,1,\dots,m-1\},$$

kun binäärioperaationa on $(k+m\mathbb{Z})+(h+m\mathbb{Z})=(k+h)+m\mathbb{Z}$. Toisin merkittynä:

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}=\{\overline{0},\overline{1},\dots,\overline{m-1}\}$$

ja binäärioperaationa on $\overline{k}+\overline{h}=\overline{k+h}$. Siis $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z},+)$ on jäännösluokkaryhmä modulo m eli $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}=\mathbb{Z}_m$.

Linkit:
Normaali aliryhmä
Tekijäryhmä
Esimerkkejä aliryhmistä
Säännöllinen matriisi