Ryhmien homomorfialause

Seuraavan lauseen mukaan jokainen homomorfismi antaa tietyn isomorfian. Lauseeseen sisältyy myös kuvauksen *indusoinnin* käsite. Tämä lause on ryhmäteorian peruslauseita.

Lause. [Ryhmien homomorfialause] Jos $f : (G,*) \to (G,\bullet)$ on ryhmähomomorfismi, niin

$$(G/\ker(f),\cdot) \simeq (\mathrm{Im}\,(f),\bullet).$$

Tarkemmin: homomorfismi f *indusoi* isomorfismin

$$F : (G/\ker(f),\cdot) \to (\mathrm{Im}\,(f),\bullet), \qquad F(a*\ker(f)) = f(a) \;\; \forall\, a \in G.$$

Huomaa, että sivun Huomioita normaaleista aliryhmistä ja homomorfimista toisen lauseen mukaan $(\ker(f),*)$ on ryhmän $(G,*)$ normaaali aliryhmä. Täten lauseen tekijäryhmän $(G/\ker(f),\cdot)$ muodostaminen on mahdollista. Tässä operaatio $\cdot$ määritellään kuten sivun Tekijäryhmä lauseessa eli $(a*\ker(f))\cdot(b*\ker(f)) = (a*b)*\ker(f)$ kaikilla $a,b \in G$. Siirrytään sitten todistamaan itse lausetta.

Todistus. Todistetaan ensin, että kuvaus F on hyvin määritelty. Jos joillekin $a,b \in G$ on $a*\ker(f) = b*\ker(f)$ niin $a \in b*\ker(f)$ eli $a = b*k$, jollekin ytimen alkiolle k. Täten, jos e' on ryhmän $(G',\bullet)$ neutraalialkio,

$$F(a*\ker(f)) = f(a) = f(b*k) = f(b)\bullet f(k) = f(b)\bullet e' = f(b) = F(b*\ker(f)),$$

mikä todistaa hyvinmääriteltävyyden.

Osoitetaan seuraavaksi, että F on homomorfismi. Kaikilla $a*\ker(f), b*\ker(f) \in G/\ker(f)$ saadaan

$$F((a*\ker(f))\cdot(b*\ker(f))) = F(a*b*\ker(f)) = f(a*b) = f(a)\bullet f(b) = F(a*\ker(f))\bullet F(b*\ker(f)).$$

Täten F on homomorfismi.

Bijektiivisyyden osoittamiseksi näytetään, että F on injektio ja surjektio. Surjektiivisuus seuraa suoraan kuvauksen F määritelmästä. Injektiivisyys todetaan käyttämällä sivun Homomorfismin ydin ja kuva toista lausetta. Olkoon e' ryhmän $(\mathrm{Im}\,(f),\bullet)$ neutraalialkio. Jos jollekin $a \in G$ on $F(a*\ker(f)) = e'$ niin silloin $f(a) = e'$. Siis $a \in \ker(f)$, joten $a*\ker(f) = \ker(f)$ on ryhmän $(G/\ker(f),\cdot)$ neutraalialkio. Täten $\ker(F) = \{\ker(f)\}$ ja saadaan injektiivisyys. $\square$

Linkit:
Huomioita normaaleista aliryhmistä ja homomorfismista

Ryhmähomomorfismin ydin ja kuva

Tekijäryhmä

Ryhmien homomorfialauseen seuraus

Suunnikassääntö

Esimerkkejä ryhmien homomorfialauseen käytöstä