Ryhmien homomorfialauseen seuraus

Jos $(N,*) \trianglelefteq (G,*)$, kuvausta

$$\pi : (G,*) \to (G/N,\cdot), \qquad \pi(a) = a*N \ \ \forall\, a \in N,$$

missä $(a*N)\cdot(b*N) = a*b*N$, sanotaan *(luonnolliseksi) projektioksi* ryhmältä $(G,*)$ tekijäryhmälle $(G/N,\cdot)$. Kuvaus on triviaalisti surjektiivinen ja se on homomorfismi, sillä kaikilla $a,b \in G$:

$$\pi(a*b) = a*b*N = (a*N)\cdot(b*N) = \pi(a)\cdot\pi(b).$$

Kuvaus on siis epimorfismi.

Olkoon $f : (G,*) \to (G',\bullet)$ ryhmähomomorfismi. Valitaan nyt $N = \ker(f)$. Silloin homomorfialauseen nojalla

$$f(a) = F(a*\ker(f)) = F(a*N) = F(\pi(a)) = (F\circ\pi)(a) \quad \forall\, a \in G,$$

missä F on kuvaus $(G/N,\cdot) \to (\mathrm{Im}\,(f),\bullet)$. Siis $f = F\circ\pi$. Sama asia voidaan ilmaista sanomalla, että oheinen diagramma *kommutoi* (alkioiden kuvautuminen ei riipu kuljetusta reitistä).

Homomorfialauseen nojalla ryhmän $(G,*)$ jokainen homomorfinen kuva on isomorfinen jonkin ryhmän $(G,*)$ tekijäryhmän kanssa. Kääntäen, ryhmän $(G,*)$ jokainen tekijäryhmä $(G/N,\cdot)$ on isomorfinen ryhmän $(G,*)$ jonkin homomorfisen kuvan kanssa. Nimittäin edellä esitetyn nojalla $G/N = \mathrm{Im}\,(\pi)$, missä π on projektio $(G,*) \to (G/N,\cdot)$.

$$\begin{tikzcd}
(G,*) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & (\mathrm{Im}\,(f),\bullet) \\
& (G/\ker(f),\cdot) \arrow[ur, "F"', "\sim"] &
\end{tikzcd}$$

Linkit:
Ryhmien homomorfialause