Suunnikassääntö

Soveltamalla homomorfialausetta erilaisiin homomorfismeihin saadaan erilaisia *isomorfialakeja*. Esitetään näistä seuraavaksi yksi.

Olkoon $(H,*) \leq (G,*)$ ja $(K,*) \trianglelefteq (G,*)$. Silloin joukko

$$H*K = \{h*k \mid h \in H,\ k \in K\}$$

muodostaa ryhmän $(G,*)$ aliryhmän operaation $*$ suhteen. Tämä voidaan todeta aliryhmäkriteerin avulla. Oletetaan, että $h_1*k_1, h_2*k_2 \in H*K$. Nyt

$$\begin{aligned}
(h_1*k_1)*(h_2*k_2)^{-1} &= h_1*k_1*k_2^{-1}*h_2^{-1} && \text{koska } (h_2*k_2)^{-1} = k_2^{-1}*h_2^{-1} \\
&= h_1*k_1*h_2^{-1}*h_2*k_2^{-1}*h_2^{-1} && \\
&= h_1*k_1*h_2^{-1}*k_3 && \text{missä } k_3 = h_2*k_2^{-1}*h_2^{-1} \in K \\
&= h_1*h_2^{-1}*h_2*k_1*h_2^{-1}*k_3 && \\
&= h_1*h_2^{-1}*k_4*k_3 && \text{missä } k_4 = h_2*k_1*h_2^{-1} \in K.
\end{aligned}$$

Koska $(H,*)$ on aliryhmä, $h_1*h_2^{-1} \in H$, ja koska $k_4*k_3 \in K$, saadaan väite eli $(h_1*k_1)*(h_2*k_2)^{-1} \in H*K$.

Oletuksesta $(K,*) \trianglelefteq (G,*)$ ja siitä, että $K \subseteq H*K \subseteq G$ seuraa, että $(K,*)$ on myös ryhmän $(H*K,*)$ normaali aliryhmä. Määritellään tekijäryhmän $((H*K)/K,\cdot)$ operaatio $\cdot$ kuten sivun Tekijäryhmä lauseessa. Kuvaus

$$f : (H,*) \to ((H*K)/K,\cdot), \qquad f(a) = a*K \quad \forall a \in H,$$

on homomorfismi. Kuvauksen ydin ja kuva ovat $\ker(f) = H \cap K$ ja $\operatorname{Im}(f) = (H*K)/K$ (todista nämä itsellesi). Täten homomorfialauseen mukaan

$$(H/(H\cap K),\cdot) \simeq ((H*K)/K,\cdot).$$

Oheisesta diagrammasta selviää, miksi sääntöä sanotaan suunnikassäännöksi.

$$\begin{tikzcd}
& (G,*) \arrow[d, dash] & \\
& (H*K,*) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(H,*) \arrow[dr, dash] & & (K,*) \arrow[dl, dash] \\
& (H\cap K,*) &
\end{tikzcd}$$

Linkit:

Ryhmien homomorfialause

Tekijäryhmä