

Suunnikassääntö

Soveltamalla homomorfialauseetta erilaisiin homomorfismeihin saadaan erilaisia *isomorfialajeja*. Esitetään näistä seuraavaksi yksi.

Olkoon $(H, *) \leq (G, *)$ ja $(K, *) \trianglelefteq (G, *)$. Silloin joukko

$$H * K = \{h * k \mid h \in H, k \in K\}$$

muodostaa ryhmän $(G, *)$ aliryhmän operaation $*$ suhteen. Tämä voidaan todeta aliryhmäkriteerin avulla. Oletetaan, että $h_1 * k_1, h_2 * k_2 \in H * K$. Nyt

$$\begin{aligned} (h_1 * k_1) * (h_2 * k_2)^{-1} &= h_1 * k_1 * k_2^{-1} * h_2^{-1} && \text{koska } (h_2 * k_2)^{-1} = k_2^{-1} * h_2^{-1} \\ &= h_1 * k_1 * h_2^{-1} * h_2 * k_2^{-1} * h_2^{-1} \\ &= h_1 * k_1 * h_2^{-1} * k_3 && \text{missä } k_3 = h_2 * k_2^{-1} * h_2^{-1} \in K \\ &= h_1 * h_2^{-1} * h_2 * k_1 * h_2^{-1} * k_3 \\ &= h_1 * h_2^{-1} * k_4 * k_3 && \text{missä } k_4 = h_2 * k_1 * h_2^{-1} \in K. \end{aligned}$$

Koska $(H, *)$ on aliryhmä, $h_1 * h_2^{-1} \in H$, ja koska $k_4 * k_3 \in K$, saadaan väite eli $(h_1 * k_1) * (h_2 * k_2)^{-1} \in H * K$.

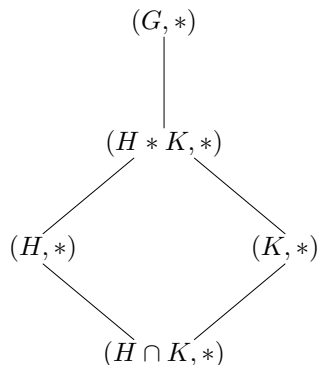
Oletuksesta $(K, *) \trianglelefteq (G, *)$ ja siitä, että $K \subseteq H * K \subseteq G$ seuraa, että $(K, *)$ on myös ryhmän $(H * K, *)$ normaali aliryhmä. Määritellään tekijäryhmän $((H * K)/K, \cdot)$ operaatio \cdot kuten sivun Tekijäryhmä lauseessa. Kuvaus

$$f: (H, *) \rightarrow ((H * K)/K, \cdot), \quad f(a) = a * K \quad \forall a \in H,$$

on homomorfismi. Kuvauksen ydin ja kuva ovat $\ker(f) = H \cap K$ ja $\text{Im}(f) = (H * K)/K$ (todista nämä itsellesi). Täten homomorfialauseen mukaan

$$(H/(H \cap K), \cdot) \simeq ((H * K)/K, \cdot).$$

Oheisesta diagrammasta selviää, miksi sääntöä sanotaan suunnikassäännöksi.



Linkit:

Ryhmien homomorfialause

Tekijäryhmä